Étude d'une cavité Fabry Pérot haute finesse à quatre miroirs pour des applications de production de rayons X et gamma par interaction Compton laser-électrons

Y. Fedala

LAL 08-164
Octobre 2008

UNIVERSITÉ PARIS SUD
U.F.R SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THÈSE
Présentée le 16 octobre 2008

Par
Yasmina Fedala

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

Sujet de la thèse

Étude d'une cavité Fabry Pérot haute finesse à quatre miroirs pour des applications de production de rayons X et gamma par interaction Compton laser-électrons

Soutenue devant la commission d'examen :

M.	S. Bielawski	Rapporteur
M.	E. Cormier	Examinateur
M.	J.M. Ortega	Rapporteur
M.	A. Variola	Examinateur
M.	G. Wormser	Président
M.	F. Zomer	Directeur de thèse

Table des matières

Introduction générale

Les cavités Fabry Pérot externes [1] fonctionnant en régime pulsé [2] sont de nos jours prévues pour produire des rayons X ou rayons gamma (γ) monochromatiques à haut flux à partir d'interactions Compton électron-laser [3] [4] [5]. Les domaines d'applications des sources rayons X/ γ monochromatiques sont très nombreux, (radiothérapie [7], imagerie médicale [6], coronarographie[8] , sciences de la matière appliquée à l'expertise d'art [9], la gestion des déchets radioactifs [10] et la physique des Hautes Energies [11]). À l'heure actuelle, divers programmes expérimentaux ont démarré en utilisant différentes technologies d'accélérateurs d'électrons et de géométries de cavités Fabry-Pérot [12].

Mon laboratoire d'accueil, le LAL, est impliqué dans deux projets de recherche et développement mettant en application la technique d'amplification de la puissance laser dans une cavité Fabry Pérot à haute finesse : une source de positrons polarisés pour les futurs collisionneurs linéaires (CLIC et ILC) et le projet RADIOTHOMX développé dans notre laboratoire. Dans chacun de ces deux projets, il s'agit de produire du rayonnement à partir des interactions Compton entre un faisceau laser pulsé et un faisceau d'électron. Dans le cas de L'ILC et CLIC, ce sont des rayons gamma dont il est nécessaire de disposer et dans le cas de RADIOTHOMX, des rayons X monochromatiques. L'objectif de la présente thèse s'inscrit dans ce cadre là, en effet, il s'agit d'un côté, de développer une cavité Fabry Pérot de haute finesse en mode pulsé pour les applications de production de rayons X ou gamma par interaction laser-électron. D'un autre coté d'étudier l'aspect dynamique faisceau dans l'accélérateur en présence d'interaction avec un faisceau laser.

Le LHC (*large hardron collider*) est un collisionneur proton-proton construit en vue de l’exploration des domaines énergétiques de l’ordre du TeV. Il va permettre de répondre à plusieurs questions ouvertes de la physique des particules dont la découverte du boson de Higgs. L’ILC (*International Linear Collider*) est un projet de collisionneur linéaire électron-positron, de très haute luminosité et une énergie de 500 à 1000 GeV au centre de masse qui va compléter les découvertes du LHC en apportant d'avantage de précision. En effet, les résultats montrent que la polarisation des deux faisceaux d'électrons et de positons, associée à la propreté de l’environnement expérimental fourni par un collisionneur linéaire, permettrait d'améliorer considérablement le potentiel de recherche de nouvelles particules et de l’étude de leur dynamique. Cela représenterait une étape décisive vers la compréhension de la nature des interactions fondamentales. Parallèlement, le Modèle Standard et ses paramètres sont susceptibles d'être examinés avec une précision inégalée. La possibilité d’avoir, en plus des électrons, des positrons polarisés permettrait également d'importants progrès à cet égard. Les positrons polarisés peuvent être produits par conversion de rayons gamma polarisés circulairement en pairs (e+, e-) dans une cible. Ces rayons gamma quant à eux peuvent être produits soit par onduleur hélicoïdal ou par interaction Compton entre un faisceau laser polarisé circulairement et un faisceau d'électrons, cette dernière méthode est celle qui est testée sur l’accélérateur ATF du laboratoire Japonais KEK.

Le projet RADIOTHOMX, qui est une collaboration entre le LAL, THALES, le CELIA et le LOA, consiste à développer une machine Compton (un anneau ou un accélérateur linéaire à récupération d'énergie) pour la production de rayons X pour des applications médicales. L'association des progrès réalisés dans le développement de résonateur Fabry Pérot de haut gain en mode pulsé et des technologies d'accélérateurs permet de développer une machine compacte capable de produire des flux intenses de rayons X monochromatiques.

La réalisation de la cavité optique pour les deux projets précédents pose un certain nombre de difficultés. Tout d'abord il faut concevoir un système offrant d'un côté une stabilité suffisante pour garantir la puissance intra-cavité nécessaire même lorsqu'elle est placée sur un accélérateur. D'un autre côté il faut assurer un faisceau laser de dimensions très réduites pour augmenter la probabilité d'interaction avec le faisceau d'électrons et produire ainsi le flux exigé par les applications. Par ailleurs, dans le cas de la source de positron polarisé il faut réaliser une polarisation circulaire du faisceau laser au point d'interaction et assurer sa stabilité. La réduction de la taille du waist du faisceau laser dans une cavité Fabry Pérot à deux miroirs peut être réalisée uniquement par une configuration concentrique. Mais cette configuration est très instable. Dans ce projet, nous avons étudié une alternative qui permet de palier à ces instabilités, cela consiste en un résonateur à quatre miroirs. Cette géométrie dans ses deux configurations planaire et non planaire offre des avantages de stabilité mécanique et de polarisation et elle permet de réduire la taille du waist du faisceau laser à l'ordre d'une dizaine de micromètres.

La première partie de cette thèse porte sur les deux projets auxquels est destinée la cavité Fabry Pérot que nous avons étudiée. Le premier chapitre est consacré à la présentation de quelques rappels théoriques nécessaires à la compréhension de la phénoménologie de la production de rayonnement par interaction Compton dans un accélérateur, linéaire ou circulaire. Nous allons ainsi donner un aperçu sur la cinématique de l'interaction Compton et nous intéresser à la dynamique transverse et longitudinale du faisceau d'électrons dans un accélérateur en présence de l'interaction Compton.

Le deuxième chapitre est consacré à la source de positrons polarisés de l'ILC, nous passerons en revue les différentes techniques de productions de positrons polarisés proposées puis nous étudierons l'effet de l'interaction Compton sur la qualité du faisceau. Ainsi nous allons modéliser le transport du faisceau d'électrons sur dix points de collisions avec un code matriciel simple et comparer les résultats avec les résultats obtenus avec CAIN, un code de *tracking* plus complexe.

Dans le troisième chapitre il s'agira du projet RADIOTHOMX. Nous étudierons la dynamique longitudinale du faisceau d'électrons dans un anneau Compton et nous présenterons les calculs basés sur l'étude de la dynamique longitudinale du faisceau d'électrons dans l'anneau Compton. Dans le but de maitriser les paramètres de son fonctionnement et satisfaire au cahier des charges, plus particulièrement le flux de rayons X produits, fixé par les applications, entre autres les applications médicales, une étude de l'effet de chacun des paramètres sera exposée.

La deuxième partie de ce document constitue l'essentiel de mon travail de thèse. Elle est consacrée à l'étude d'une cavité Fabry Pérot à quatre miroirs de haute finesse pour ATF2, ILC et RADIOTHOMX.

Le premier chapitre est consacré à la présentation de la première étape de notre R&D c'est-à-dire la construction d'une cavité confocale pour la validation du système d'asservissement.

Le deuxième chapitre concerne l'étude théorique de la cavité à quatre miroirs. Les calculs de tolérances mécaniques et les instabilités de polarisation engendrées par les désalignements pour différentes géométries de cavités à quatre miroirs sont présentés, les modes de ce genre de cavités et ceci pour les géométries planaire et non planaire sont calculés, nous finirons par le calcul de la luminosité pour une cavité en tétraèdre.

Dans le troisième chapitre nous présentons le travail expérimental réalisé afin de construire une cavité à quatre miroirs qui permette de tester les résultats des calculs théoriques. Les détails de la réalisation du montage de la diode laser et la méthode d'alignement du faisceau laser et son couplage à la cavité sont ensuite exposés.

Les résultats des mesures sont présentés dans le chapitre quatre, nous présenterons les modes ainsi que les tailles des waists mesurés pour les deux géométries planaire et non planaire et nous ferons une comparaison avec les résultats des calculs théoriques.

I. Première Partie : Etude de la dynamique transverse pour la source de positrons polarisés et de la dynamique longitudinale pour le projet RADIOTHOMX en présence d'interaction Compton

Chapitre 1. Rappels théoriques

Dans ce chapitre, nous introduisons les principaux aspects théoriques nécessaires à la description des deux projets auxquels nous nous intéresserons dans les chapitres suivants, c'est-à-dire : la production des rayons gamma pour la source de positrons polarisés (ILC) et la production des rayons X pour des applications médicales (projet RADIOTHOMX). Le principe de production de rayons gamma et des rayons X est basé sur la rétrodiffusion Compton d'un faisceau d'électrons sur un faisceau laser. Dans le cas d'une source de positrons polarisés, ces rayons doivent être polarisés circulairement (plus de détails seront donnés dans le chapitre 3). Par conséquent, le faisceau laser doit avoir une polarisation circulaire au point d'interaction. Nous commencerons donc par une description de la cinématique de la diffusion Compton. Ensuite, dans le but d'estimer l'effet de l'interaction Compton sur le faisceau d'électrons, nous introduirons d'abord les notions relatives au faisceau d'électrons et à son transport dans un accélérateur autrement dit sa dynamique transverse. Puis, on s'intéressera à sa dynamique longitudinale dans le cas d'un anneau de stockage.

1. Cinématique de l'interaction Compton $e+\gamma \to e'+\gamma'$

Pour comprendre le processus de l'interaction Compton entre un faisceau laser et un faisceau d'électrons, impliqué dans les deux projets de production de rayons X et de production de positrons polarisés, nous allons étudier la cinématique de l'interaction $e+\gamma \to e'+\gamma'$.

La cinématique de la diffusion Compton est décrite en détail dans plusieurs références (par exemple [13] [14] [15]). Nous allons donc rappeler seulement les équations les plus importantes décrivant cette cinématique. Ces équations seront utilisées dans le chapitre 2 pour le calcul de l'effet de l'interaction Compton sur la dynamique transverse et longitudinale des électrons.

Dans toutes les équations présentées dans cette section nous avons supposé la célérité de la lumière $c = 1$.

La diffusion Compton [16] est la diffusion élastique d'un photon sur un électron. la figure 1.1 est une représentation schématique de la diffusion Compton dans le référentiel du laboratoire. Avec les conventions utilisées dans cette figure nous avons :

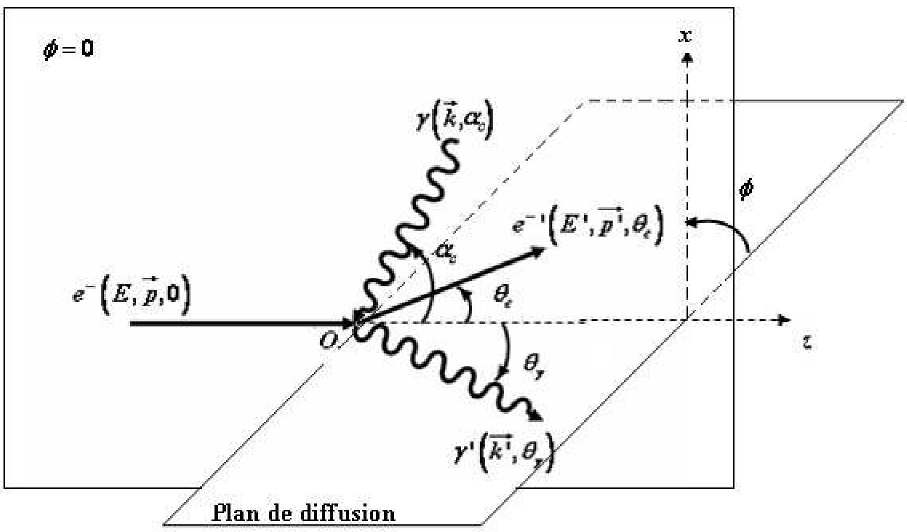


Figure 1.1 Vue de la diffusion Compton dans le plan d'interaction.

- les électrons incidents ont une énergie $E = \gamma m$ et une impulsion le long de l'axe (Oz), où γ est le facteur de Lorentz et m la masse de l'électron.
- les photons incidents γ ont une énergie k, un angle d'incidence $(\pi - \alpha_c)$ par rapport à (Oz) et une impulsion $\overrightarrow{K} = (0, -K\sin\alpha_c, -K\cos\alpha_c)$,
- les électrons diffusés e' ont une énergie E', un angle de diffusion θ_e par rapport à (Oz) et une impulsion $\overrightarrow{p'} = (p'\sin\theta_e \sin\varphi, p'\sin\theta_e\cos\varphi, p'\cos\theta_e)$
- les photons diffusés γ' ont une énergie k', un angle de diffusion θ_γ par rapport à (Oz) et une impulsion, $\overrightarrow{K'} = (K'\sin\theta_\gamma\sin\varphi, K'\sin\theta_\gamma\cos\varphi, K'\cos\theta_\gamma)$

Pour les deux projets, le laser envisagé est un laser à fibre optique qui permet d'atteindre une très grande puissance moyenne. La longueur d'onde du laser est $\lambda = 1030\ nm$, ce qui correspond à une énergie des photons du laser $k = 1,2\ eV$.
Dans le cas de la source de positrons polarisés, nous avons besoin de produire des rayons gamma de 30 *MeV*, ce qui impose une énergie des électrons incidents de $E = 1,3\ GeV$. Cependant dans le cas du projet RADIOTHOMX, ce sont des rayons X de quelques dizaines de *keV* qui doivent être produits ce qui correspond à des électrons incidents d'énergie $E = 50\ MeV$.

En appliquant les équations de conservation de l'énergie et de l'impulsion, nous obtenons les expressions des grandeurs cinématiques introduites ci-dessous.
L'énergie des photons diffusés en fonction de l'angle de diffusion est donnée par l'expression :

$$\frac{k'}{k} = \frac{E + p\cos\alpha_c}{E + k - p\cos\theta_\gamma + k\cos(\alpha_c - \theta_\gamma)} \qquad \text{(I.1.1)}$$

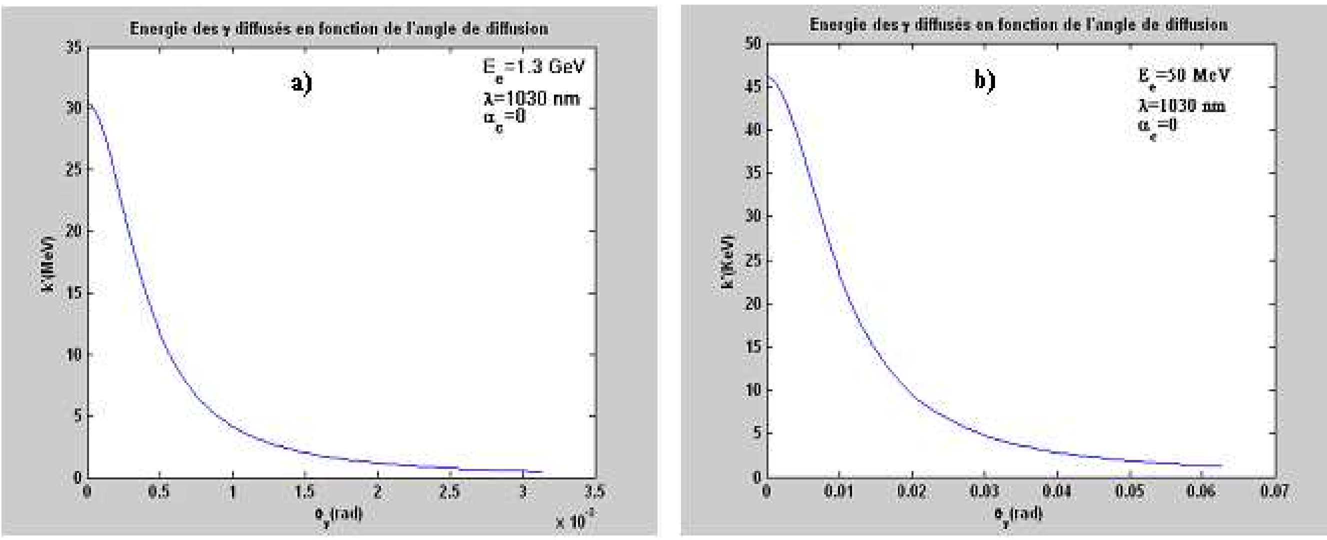


Figure 1.2. Energie des photons diffusés en fonction de leur angle de diffusion. a) pour un faisceau de 1,3 *GeV*. b) pour un faisceau de 50 *MeV*. Pour un angle de croisement α_c=0.

Pour un angle de croisement nul ($\alpha_c = 0$) et dans la limite où $\theta_\gamma \ll 1$, le rapport des énergies des photons diffusés et des photons incidents est donnée par :

$$\frac{k'}{k} \simeq \frac{4a\gamma^2}{1+a\theta_\gamma^2\gamma^2} \qquad \text{(I.1.2)}$$

Où $a = \dfrac{1}{1+\dfrac{4kE}{m^2}}$; $m = 511\,keV$ étant l'énergie de masse de l'électron.

La figure 1.2 représente l'énergie des photons diffusés en fonction de l'angle de diffusion. Dans le cas d'un faisceau d'électrons à 1,3 *GeV*, l'énergie maximale des photons diffusés est de 30*MeV*. Dans le cas d'un faisceau d'électrons de 50 *MeV*, les photons sont émis avec une énergie de 45 *keV*.

L'énergie maximale des photons diffusés $k'_{\max}$ correspond à une énergie minimale des électrons diffusés, elle est atteinte pour un angle de diffusion $\theta_\gamma = 0$.

$$\begin{aligned} E'_{\min} &= E - k'_{\max} + k = E - 4ak\frac{E^2}{m^2} + k \\ E'_{\min} &\simeq E - 4ak\frac{E^2}{m^2} \end{aligned} \qquad \text{(I.1.3)}$$

L'énergie minimale des photons diffusés $k'_{\min}$ correspondant à l'énergie maximale des électrons diffusés $E'_{\max}$, elle est atteinte pour un angle $\theta_\gamma = \pi$

$$k'_{\min} = k \qquad \text{(I.1.4)}$$

$$E'_{\max} = E - k'_{\min} + k = E \qquad \text{(I.1.5)}$$

A partir des équations :

$$\begin{cases} E + k = E' + k' \\ \vec{p} + \vec{K} = \vec{p}\,' + \vec{K}\,' \end{cases} \qquad \text{(I.1.6)}$$

On peut déduire la relation entre l'impulsion des électrons diffusés p' et l'angle de diffusion θ_e :

$$p'\left(C^2 - B^2\right) - 2ABp' - m^2C^2 - A^2 = 0 \qquad \text{(I.1.7)}$$

La résolution de l'équation (1.6) permet de calculer le moment des électrons diffusés

$$p' = \frac{AB \pm \sqrt{\left(A^2 - m^2\left(C^2 - B^2\right)\right)}}{\left(C^2 - B^2\right)} \qquad \text{(I.1.8)}$$

Où :

$$\begin{aligned} A &= m^2 + Ek + kp\cos\alpha_c \\ B &= p\cos\theta_e - k\cos\left(\theta_e - \alpha_c\right) \\ C &= E + k \end{aligned} \qquad \text{(I.1.9)}$$

L'énergie des électrons diffusés peut alors être calculée en considérant la conservation du quadrivecteur impulsion- énergie

$$E'^2 - p'^2 = m^2 \quad (I.1.10)$$

Où :

- r_0 le rayon classique donné par $r_0 = \frac{\alpha_c}{mc^2} = 2{,}817\,10^{-13}\,cm$
- $\rho = \frac{k'}{k_{\max}}$ est le rapport de l'énergie des photons diffusés à l'énergie maximale.

L'énergie moyenne, la moyenne quadratique et la dispersion en énergie des électrons diffusés peuvent être calculées respectivement par :

$$\langle E' \rangle = \frac{\int_{E'_{\min}}^{E'_{\max}} E' \frac{d\sigma}{dE}}{\int_{E'_{\min}}^{E'_{\max}} \frac{d\sigma}{dE}} \quad (I.1.11)$$

$$\langle E'^2 \rangle = \frac{\int E'^2 \frac{d\sigma}{dE}}{\int \frac{d\sigma}{dE}} \quad (I.1.12)$$

$$\delta = \sqrt{\langle E'^2 \rangle - \langle E' \rangle^2} \quad (I.1.13)$$

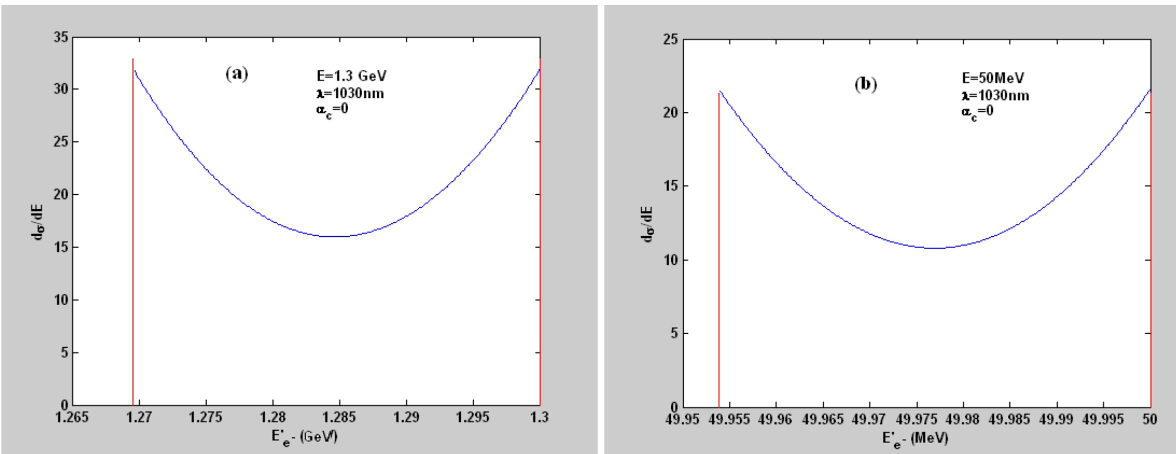


Figure 1.3. Section efficace différentielle de diffusion en fonction de l'énergie. a)pour un faisceau de 1,3 *GeV*. b) pour un faisceau de 50*MeV*. Pour un angle de croisement α_c=0.

La figure 1.3 représente la section efficace de diffusion d'un electron en fonction de l'énergie. On peut voir que pour un faisceau d'électrons d'une énergie $E = 1{,}3\ GeV$ et un laser de longueur d'onde $\lambda = 1030\ nm$ (source de positrons polarisés), les électrons sont diffusés avec une énergie moyenne de $E' = 1{,}28\ GeV$. Dans le cas d'un faisceau d'électrons de 50 MeV (RADIOTHOMX), les électrons sont diffusés avec une énergie $E' = 49.977\ MeV$.

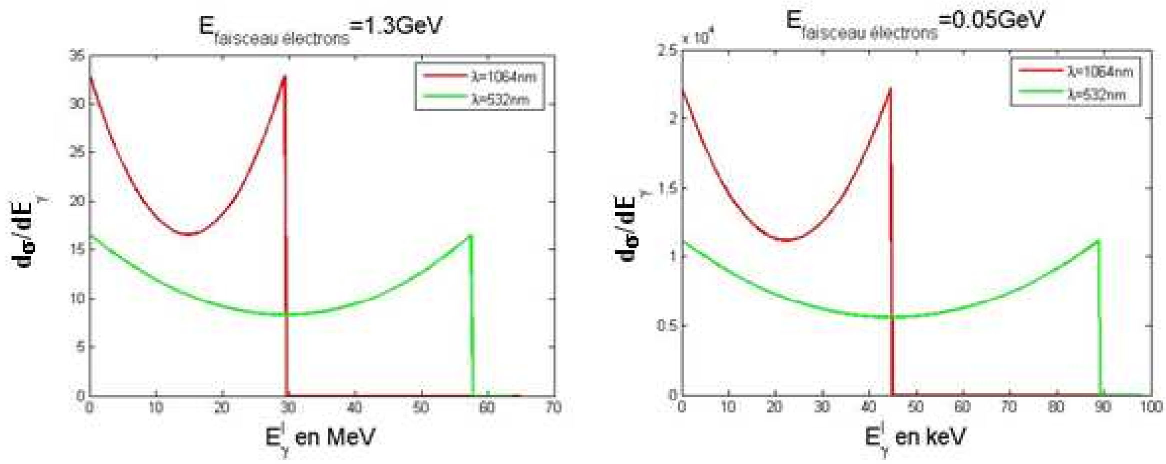


Figure 1.4 Spectre des photons diffusés par interaction Compton

La Figure 1.4 représente le spectre des photons diffusés par interaction Compton pour une énergie $E = 1,3\ GeV$ et E=50 MeV et pour deux longueurs d'onde $\lambda = 1030$ nm et $\lambda = 1060$ nm.

La figure 1.5 montre la distribution angulaire des électrons diffusés dans les deux cas c'est-à-dire $E = 1,3\ GeV$ et E=50 MeV .

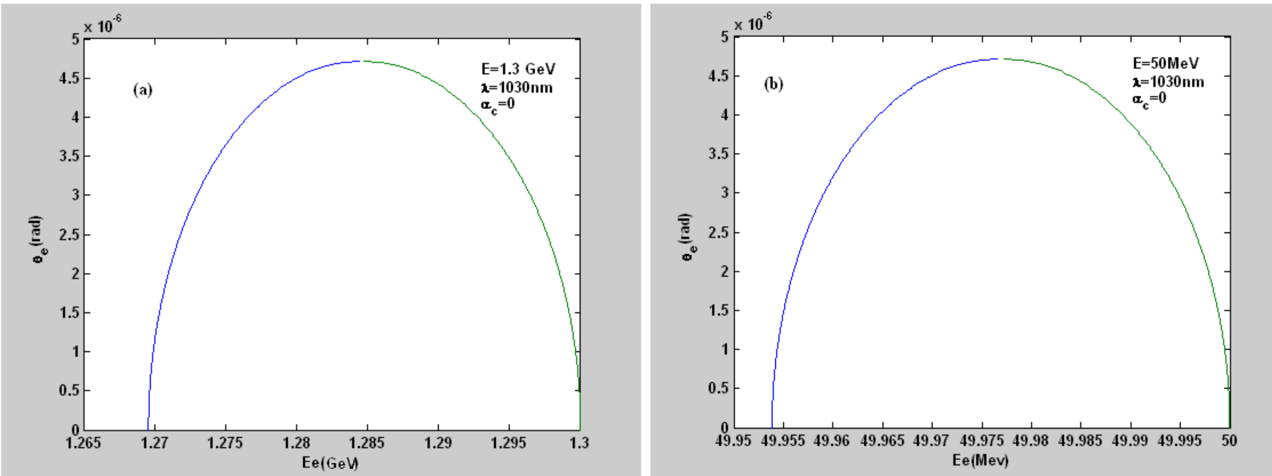


Figure 1.5. Energie des électrons diffusés $E_e^{'}$ en fonction de l'angle de diffusion. a)pour un faisceau de 1,3 *GeV*. b) pour un faisceau de 50 *MeV*. Pour un angle de croisement α_c=0.

1.1.1.Section efficace polarisée

Les états de polarisations des corps intervenant dans une réaction sont très importants dans la plupart des applications comme dans le cas production de positrons polarisés où le laser doit être polarisé circulairement.

La section efficace de l'interaction Compton tenant compte des états de polarisations initiaux et finaux des électrons et des photons est donnée traitée en détail dans la référence [17], elle est donnée par la relation :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{8}r_e\left(\frac{k'}{k}\right)\times\left[\begin{array}{l}F_0+F_3\left(\xi_3^{(L)}+\overline{\xi}_3^{\,\prime(L)}\right)+F_{11}\xi_1^{(L)}\overline{\xi}_1^{\,\prime(L)}+F_{22}\xi_2^{(L)}\overline{\xi}_2^{\,\prime(L)}+F_{33}\xi_3^{(L)}\overline{\xi}_3^{\,\prime(L)}+\left(f\cdot\varsigma+g\cdot\overline{\varsigma}'\right)\xi_2^{(L)}\\+\left(f'\cdot\varsigma+g'\cdot\overline{\varsigma}'\right)\overline{\xi}_2^{\,\prime(L)}+\overline{\varsigma}'\cdot G\cdot\varsigma+\ldots\end{array}\right]$$

(I.1.14)

Les paramètres ξ_i $(i=1,2,3)$ sont les composantes du paramètre de Stokes (le prime est utilisé pour l'état de polarisation final).

Dans une base définit par les vecteurs unitaires $\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\frac{\vec{K}}{|\vec{K}|}\right)$ selon les conventions adoptées dans [18] :

ξ_1 donne le degré de polarisation linéaire le long de la direction $(e_1+e_2)/\sqrt{2}$ $(\xi_1>0)$ ou $(e_1-e_2)/\sqrt{2}$ $(\xi_1<0)$

ξ_2 donne le degré de polarisation circulaire

ξ_3 donne la polarisation linéaire le long de la direction e_1 $(\xi_3>0)$ ou e_2 $(\xi_3<0)$

De même que pour les photons, ς est le vecteur polarisation des électrons.
Les cœfficients apparaissant dans (I.1.14) sont dépendants des énergies, des impulsions initiales et finales des photons et de l'angle de diffusion [18] .
La section efficace polarisée sert à définir le transfert de polarisation entre les particules incidentes et les particules diffusées. Le principe de la polarimétrie est basé sur cette corrélation entre les états de polarisation finaux et initiaux. Dans notre cas la section efficace polarisée nous renseignera d'abord sur le taux de polarisation circulaire des rayons gamma diffusés par interaction Compton, puis sur le taux de polarisation des positrons produits par création de pair dans une cible.

1.2.3 La luminosité :

Dans ce paragraphe nous décrivons brièvement le concept de la luminosité, nous y reviendrons dans la deuxième partie pour plus de détails.
Le nombre total de photons produits par l'interaction entre un paquet d'électrons et un faisceau laser peut être déduit de l'équation suivante [19] :

$$N=L\cdot\sigma \qquad \text{(I.1.15)}$$

Où N est le nombre d'interactions entre le faisceau laser et les électrons (égal au nombre de photons produits), L est la luminosité du processus et σ est la section efficace dans le référentiel du laboratoire.

La luminosité totale de l'interaction entre un faisceau d'électrons et un faisceau laser est donnée par l'expression :

$$L=\int\iiint v_{rel}\,\rho_e\,\rho_\gamma\,dz\,dx\,dy\,dt \qquad \text{(I.1.16)}$$

Où $v_{rel}=c\left(1+\cos\left(\alpha_c\right)\right)$ est la vitesse relative des deux faisceaux, α_c est l'angle d'interaction. ρ_e et ρ_γ sont les densités du faisceau d'électrons et du laser respectivement.

Dans le cas où les deux faisceaux ont un profil gaussien d'écart type σ_γ et σ_e , et dans la limite où la divergence des deux faisceaux est négligeable devant l'angle de croisement α_c , la luminosité intégrée s'écrit en fonction de l'intensité I_e du faisceau d'électrons, de la puissance P_L du faisceau laser et de sa longueur d'onde λ selon :

$$L = \frac{N_e N_L}{2\pi\sqrt{\sigma_{e,y}^2+\sigma_{L,y}^2}\sqrt{\cos^2(\alpha_c)\left(\sigma_{L,x}^2+\sigma_{L,x}^2\right)+\sin^2(\alpha_c)\left(\sigma_{e,s}^2+\sigma_{L,s}^2\right)}} \qquad \text{(I.1.17)}$$

Où $\sigma_{L,s}$ et $\sigma_{e,s}$ sont les dimensions longitudinales de l'impulsion laser et du paquet d'électrons et du faisceau laser respectivement.
($\sigma_{L,x}$, $\sigma_{L,y}$) et ($\sigma_{e,x}$, $\sigma_{e,y}$) sont les dimensions transverses de l'impulsion laser et du paquet d'électrons et du faisceau laser respectivement.

L'équation (I.1.17) montre que, pour une collision frontale, la luminosité de l'interaction Compton est inversement proportionnelle aux dimensions transverses des deux faisceaux. Il est donc très important de focaliser au maximum les deux faisceaux au point d'interaction. La réduction de la taille transverse du faisceau d'électrons se fait par un choix minutieux de l'optique de focalisation. La réduction de la taille du faisceau laser se fait par le choix d'un résonateur optique dont on parlera dans la deuxième partie.
Cependant, lorsque l'angle de croisement est non nul, il faut aussi tenir compte des longueurs des deux faisceaux. Il est important d'avoir un recouvrement maximal entre le paquet d'électrons et l'impulsion laser.

1.1.3 Section efficace de la diffusion Compton :

1.1.4 section efficace non polarisée

L'expression de la section efficace de la diffusion Compton non polarisée dans le cas d'un angle de croisement nul est donnée par :

$$\frac{d\sigma}{d\rho} = 2\pi r_0^2 a\left[\frac{\rho^2(1-a)^2}{1-\rho(1-a)}+1+\left(\frac{1-\rho(1+a)}{1-\rho(1-a)}\right)^2\right] \qquad \text{(I.1.18)}$$

Où ρ et a sont les paramétres définis dans la section précédente.

2. Dynamique transverse d'un faisceau d'électrons

Dans la section précédente nous avons passé en revue l'interaction Compton entre un faisceau d'électrons et un faisceau laser. L'interaction Compton dépend, comme le montrent les équations présentées dans les paragraphes précédents, des énergies des faisceaux incidents mais aussi de leurs caractéristiques géométriques et dynamiques. Dans cette partie, nous décrivons les notions essentielles pour la compréhension de la dynamique transverse d'un faisceau d'électrons. Dans un premier temps, nous décrirons le système de coordonnées utilisé pour la description de la dynamique du faisceau d'électrons dans un accélérateur. Ensuite, nous introduirons la notion d'espace de phases, très utilisée en physique des accélérateurs. Puis on s'intéressera à la description du faisceau d'électrons comme un système de particules.

2.1. Système de coordonnées

Les structures optiques (mailles d'accélérateurs circulaires, lignes de transport de faisceaux) sont constituées d'une succession d'aimants de courbure et de lentilles multipolaires (quadrupôles, sextupôles…). Pour décrire l'ensemble des particules d'un faisceau, il est avantageux de décrire les champs traversés dans un même référentiel. La convention adoptée pour le système de coordonnées est représentée sur la figure 1.6.
Le système de coordonnées (x, s, y) s'appuie sur une trajectoire dite ***trajectoire de référence***

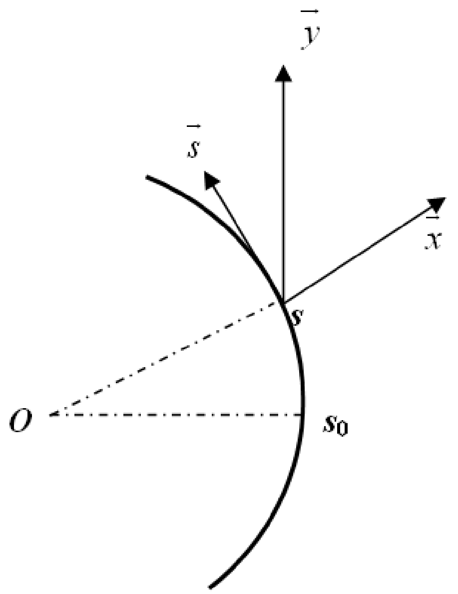


Figure 1.6. Système de coordonnées.

(c) associée à une particule de référence d'impulsion p_0 donnée (en générale c'est l'impulsion moyenne du faisceau), cette trajectoire est droite dans des sections droites et éléments multipolaires et courbes, de courbure $\frac{1}{R}$, dans les aimants de déviation (dipôles).

2.2. Espace des phases

L'évolution d'un système physique à un instant t est déterminée par la valeur de r coordonnées $q_i (i = 1,...,r)$, r étant le nombre de degrés de liberté du système, et de leurs dérivées par rapport au temps $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$.

En l'absence de frottement, les équations du mouvement peuvent être décrites comme suit :

$$\begin{cases} \dot{q}_i = +\frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \tag{I.2.1}$$

Avec $i = 1,...,r$ Où $H(q_i, p_i, t)$ est l'Hamiltonien du système.

Un système est dit Hamiltonien s'il existe une fonction $H(q, p, t)$ qui vérifie les équations (I.2.1)[20]. Lorsque H ne dépend pas explicitement du temps, l'Hamiltonien est l'énergie totale du système.

L'espace des phases canonique est l'espace à $2r$ dimensions défini par les coordonnées conjuguées $q_i, p_i \left(i = 1,...,r\right)$.

Un faisceau à N particules est un système à $3N$ degrés de liberté si les degrés de liberté intrinsèques (comme le spin) peuvent être négligés. Les $3N$ coordonnées q_i sont les composantes des vecteurs positions $r_j (j = 1,..,N)$ de chaque particule. L'espace des phases est alors à $6N$ dimensions.

Lorsque les N particules sont identiques et sans interactions mutuelles, l'espace des phases d'une seule particule peut être considéré. A un instant t, l'état du faisceau peut être représenté par les N points $M_j(t)$ (l'indice j correspondant à la particule j).

2.3. Emittance du faisceau :

Après avoir introduit les concepts d'espace de phases, nous allons nous intéresser au faisceau de particules. Une particule est définie dans l'espace de phases par six coordonnées (x, y, z, p_x, p_y, p_z). Pour n particules, le faisceau sera défini dans un espace des phases à 6n dimensions. Si toutefois les particules n'interagissent pas entre elles, on peut réduire le problème à une seule particule dans un espace à six dimensions. On peut définir l'émittance du faisceau de deux manières.

2.3.1 Définition de l'émittance

- Première définition :

On peut définir l'émittance du faisceau comme le volume qu'il occupe dans l'espace de phases. En négligeant le couplage entre les trois coordonnées d'une particule, on peut définir l'émittance de chaque degré de liberté, les émittances transverses $(\varepsilon_x, \varepsilon_y)$ et l'émittance longitudinale ε_s ou (ε_z) selon la convention de notation. L'émittance totale est le produit des trois émittances $\varepsilon = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_s$. L'espace de phases transverse est souvent remplacé par l'espace de traces [20]définit par les variables $\left\{x, x^{'} = \frac{dx}{ds}\right\}$ et $\left\{y, y^{'} = \frac{dy}{ds}\right\}$ (dans ce qui suit par abus de langage on ne fera pas la distinction entre les deux notions), la direction s décrit la direction de la particule ayant une impulsion p_0 (égale à l'impulsion moyenne du faisceau).

D'après le théorème de Liouville l'émittance est une constante du mouvement du système défini par l'ensemble des particules du faisceau, cependant certains phénomènes font que l'émittance ne soit plus conservée [22] parmi eux :

- Le couplage entre degrés de liberté
- La diffusion Colombienne entre les particules dans le faisceau lui-même ou d'un paquet du faisceau sur un autre.
- La diffusion avec les gaz résiduels.
- L'émission de rayonnement synchrotron

Lorsque l'énergie du faisceau varie pendant le mouvement (par exemple en présence d'une cavité accélératrice), l'émittance n'est plus conservée. On peut cependant définir dans l'espace des traces ***l'émittance normalisée*** [20] par le produit de l'émittance initiale par le facteur $\beta\gamma$.

$$\varepsilon_n = \beta\gamma\varepsilon \tag{I.2.2}$$

Où γ est l'énergie relative de la particule (le facteur de Lorentz) et β sa vitesse relative.

L'émittance normalisée est alors l'invariant du mouvement lorsque l'énergie change.

- deuxième définition :

Du point de vue statistique**,** si on considère le faisceau comme une distribution statistique dans l'espace de phases définie par sa fonction de distribution f , l'émittance est donnée par les moments de deuxième ordre (variance et covariance) au moyen de :

$$\varepsilon = \sqrt{\overline{x^2}\,\overline{x'^2} - \left(\overline{xx'}\right)^2} \tag{I.2.3}$$

Les termes de (I.2.3) sont définis comme suit :

$$\overline{x^2} = \frac{\iint x^2 f(x,x')dxdx'}{\iint f(x,x')dxdx'}$$
$$\overline{x'^2} = \frac{\iint x'^2\, f(x,x')dxdx'}{\iint f(x,x')dxdx'} \tag{I.2.4}$$

Et

$$\overline{xx'} = \frac{\iint xx'\, f(x,x')dxdx'}{\iint f(x,x')dxdx'} \tag{I.2.5}$$

L'équation (I.2.4) définit les variances et (I.2.5) la covariance. Le faisceau est assimilé à une distribution gaussienne dans l'espace de phases.

2.3.2 Représentation de l'émittance : Matrice du faisceau

Dans l'espace à deux dimensions, l'émittance est souvent représentée par une ellipse contenant 95% ou 99% des particules. Au cours du mouvement dans le temps, cette ellipse change de forme tout en conservant l'aire qu'elle entoure, c'est la conséquence du théorème de Liouville.

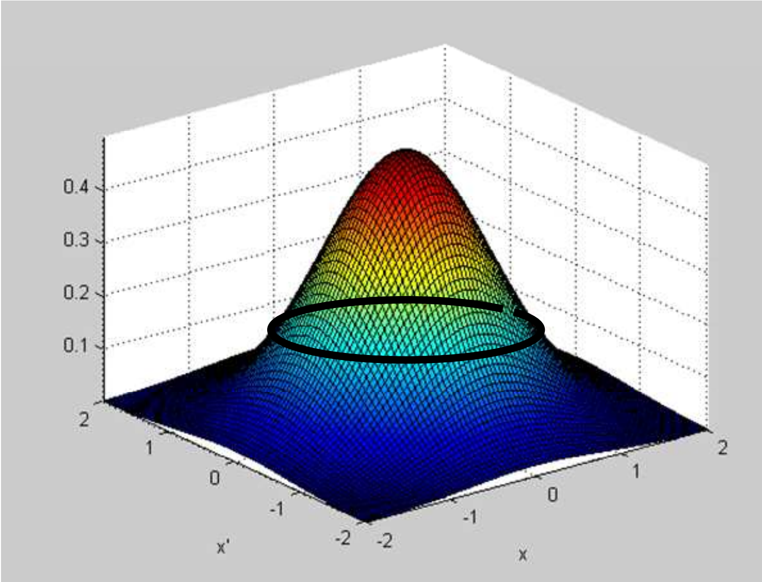


Figure 1.7. Gaussienne représentative du faisceau en trois dimensions.

Si on considère un faisceau idéal défini par son émittance, on peut admettre qu'il est représenté par l'ellipse de covariance d'une distribution gaussienne à deux variables (cf. figure 1.7). Cette dernière correspond à une surface dans un espace tridimensionnel dont les projections horizontales représentent les ellipses d'émittance.

L'équation d'un ellipsoïde à 6 dimensions peut être exprimée sous forme matricielle dans un espace à 6 dimensions par [23] :

$$X^t(0)\sigma^{-1}(0)X(0)=1 \quad \text{(I.2.6)}$$

Où le vecteur *X* est donné par :

$$X=\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ l \\ \delta \end{pmatrix} \quad \text{(I.2.7)}$$

x	Le déplacement horizontal par rapport à la trajectoire de référence
$x'=\dfrac{dx}{ds}$	L'angle dans le plan horizontal par rapport à la trajectoire de référence
y	Le déplacement vertical par rapport à la trajectoire de référence
$y'=\dfrac{dy}{ds}$	L'angle dans le plan vertical par rapport à la trajectoire de référence
l	La différence de longueur de trajectoire de la particule par rapport à la longueur de trajectoire de la particule de référence
$\delta=\dfrac{\Delta p}{p}$	La déviation du moment de la particule par rapport au moment de la particule de référence $p=p_0$.

σ est une matrice symétrique 6X6 avec un déterminant positif, dans sa forme la plus générale cette matrice est donnée par

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} & \sigma_{15} & \sigma_{16} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \sigma_{24} & \sigma_{25} & \sigma_{26} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & \sigma_{34} & \sigma_{35} & \sigma_{36} \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & \sigma_{43} & \sigma_{44} & \sigma_{45} & \sigma_{46} \\ \sigma_{51} & \sigma_{52} & \sigma_{53} & \sigma_{54} & \sigma_{55} & \sigma_{56} \\ \sigma_{61} & \sigma_{62} & \sigma_{63} & \sigma_{64} & \sigma_{65} & \sigma_{66} \end{bmatrix} \qquad \text{(I.2.8)}$$

Pour un système avec une symétrie médiane et un faisceau ne présentant aucune corrélation entre les sous espaces de phases transverse et longitudinal, la matrice σ devient :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} & \sigma_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{43} & \sigma_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{55} & \sigma_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{65} & \sigma_{66} \end{bmatrix} \qquad \text{(I.2.9)}$$

On peut alors définir des sous matrices pour chaque sous espace de la manière suivante :

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}; \sigma_y = \begin{bmatrix} \sigma_{33} & \sigma_{34} \\ \sigma_{43} & \sigma_{44} \end{bmatrix}; \sigma_l = \begin{bmatrix} \sigma_{55} & \sigma_{56} \\ \sigma_{65} & \sigma_{66} \end{bmatrix} \qquad \text{(I.2.10)}$$

Une autre définition de l'émittance a été présentée par Courant et Snyder [25]. Elle est fondée sur la considération que sous l'influence de forces linéaires, une particule dans un sous -espace des phases (par exemple l'espace (x, x’)) suit une ellipse qui varie dans le temps et peut être caractérisée par trois paramètres (α, β, γ) appelés ***paramètres de Twiss***.

Si on considère un sous espace à deux dimensions le faisceau peut être représenté par la matrice dite ***Matrice sigma*** ou ***matrice du faisceau*** définie comme suit :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \frac{\varepsilon_w}{\pi} \begin{bmatrix} \beta_w & -\alpha_w \\ -\alpha_w & \gamma_w \end{bmatrix} \quad ; w = x, y \qquad \text{(I.2.11)}$$

L’équation de l’ellipse déduite en tenant compte de l’équation (I.2.6) est :

$$\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 = Det(\sigma) = \varepsilon^2 \qquad \text{(I.2.12)}$$

$$\beta\gamma - \alpha^2 = 1 \qquad \text{(I.2.13)}$$

figure 1.8 représente les paramètres de l’ellipse du faisceau avec chaque type de représentation et les équations les reliant entre eux.

2.3.3. Théorème de Liouville

Le théorème de Liouville décrit la conservation de la densité d'un ensemble de particules dans un volume de l'espace de phase.
Plaçons nous dans l'espace de phase défini par les coordonnées x_i et p_i et considérons un système à n particules distribuées selon la fonction de distribution $f(p_i, x_i, t) \quad i = 1..n$.
Dans leur mouvement dans le temps, ces particules forment un flux dans l'espace des phases qui obéit à la loi de conservation suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla(f \cdot v) = 0 \qquad \text{(I.2.14)}$$

Où v définit les dérivées par rapport au temps des coordonnées p_i et x_i .
Si le nombre de points n se conserve dans le temps on obtiendra :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_1^n \left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f \cdot \dot{x}_i \right) + \frac{\partial}{\partial p_i}\left(f \cdot \dot{p}_i \right) \right] = 0 \qquad \text{(I.2.15)}$$

Si on développe les dérivées, l'équation(I.2.15) devient :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_1^n \left[\dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \dot{p}_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \right] + f \sum_1^n \left[\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right] = 0 \qquad \text{(I.2.16)}$$

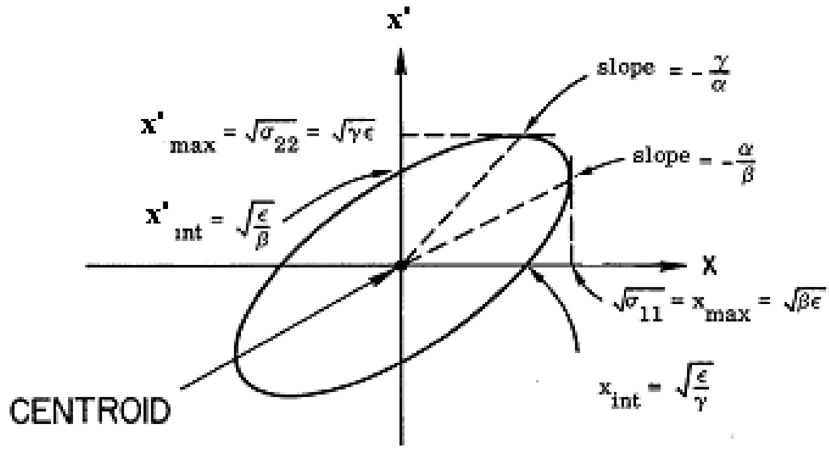
En tenant compte de (I.2.1) dans(I.2.16) , on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_1^n \left[\dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \dot{p}_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \right] = \frac{df}{dt} = 0 \qquad \text{(I.2.17)}$$

L'équation (I.2.17) exprime la conservation de la densité dans l'espace des phases observé par une particule dans son voisinage au cours du temps.
En tenant compte de (I.2.17) dans (I.2.14) on obtient :

$$\nabla(f \cdot v) = 0 \qquad \text{(I.2.18)}$$

Le théorème de Liouville assure donc l'invariance de la densité de particules pendant leur mouvement dans l'espace des phases.



$$\int_{ellipse} dxdx' = \pi\varepsilon = \pi\sqrt{\det\sigma} = \pi x_{\max} x'_{\text{int}} = \pi\left(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2\right)^{1/2}$$

Figure 1.8 Ellipse d'émittance.

2.4. Mouvement d'une particule dans un champ magnétique

Le mouvement d'une particule dans un accélérateur circulaire est décrit par le système d'équations (I.2.19) dites équations de ***Hill,*** elles peuvent être obtenues à partir de l'équation du mouvement d'une particule relativiste soumise à un champ magnétique (Force de Lorentz) dans un accélérateur circulaire en négligeant tous les termes d'ordres supérieurs [27] :

$$\begin{cases} x'' - (k(s) - \dfrac{1}{R(s)^2})x = \dfrac{1}{R(s)}\dfrac{\Delta p}{p_0} \\ y'' + k(s)\, y = 0 \end{cases} \qquad \text{(I.2.19)}$$

Avec : $\Delta p = p - p_0$ et $p_0 = eB_0$ et $k = \dfrac{eB'}{p_0}$.

En reprenant les notations de la figure 1.6., *x* et *y* sont les coordonnées transverses de la particule, *R* le rayon de courbure local, *p* est l'impulsion de la particule, p_0 est l'impulsion de la particule de référence, *B$_0$* représente le champ magnétique dipolaire, *B'* est le gradient de champ local et e la charge de l'électron (pour un dipôle *B'*=0). $x'' = \dfrac{d^2x}{ds^2}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{ds^2}$

Le terme $\dfrac{1}{R^2}x$ représente la '***focalisation faible'*** de l'aimant secteur, et *k* représente ***' la focalisation forte'*** donnée par un quadrupole.

L'équation du mouvement horizontal peut être écrite sous la forme :

$$x'' + K(s)x = \frac{1}{R}\frac{\Delta p}{p} \qquad \text{(I.2.20)}$$

Où $K(s) = -k(s) + \frac{1}{R^2(s)}$.

La solution de (I.2.20) peut être écrite sous la forme :

$$x(s) = x_h(s) + x_i(s) \tag{I.2.21}$$

Où x_h et x_i sont respectivement la solution homogène et la solution inhomogène (particulière) de l'équation, ce qui implique :

$$\begin{aligned} x_h^{''} + K(s)x_h &= 0 \\ x_i^{''} + K(s)x_i &= \frac{1}{R}\frac{\Delta p}{p_0} \end{aligned} \tag{I.2.22}$$

Il est possible d'introduire la fonction $D(s)$ pour normaliser x_i par rapport à $\frac{\Delta p}{p_0}$:

$$D(s) = \frac{x_i}{\frac{\Delta p}{p_0}} \tag{I.2.23}$$

La solution générale peut alors être écrite sous la forme :

$$x(s) = C(s)x_0 + S(s)x_0^{'} + D(s)\frac{\Delta p}{p_0} \tag{I.2.24}$$

Avec $x_0 = x_h(s = s_0)$ et $x_0^{'} = x_h^{'}(s = s_0)$. $C(s)$ Et $S(s)$ sont les fonctions dites pseudo cosinus et pseudo sinus respectivement. Ces deux fonctions satisfont les équations :

$$\begin{aligned} C'' + K(s)C &= 0 \\ S'' + K(s)S &= 0 \end{aligned} \tag{I.2.25}$$

Avec $\begin{matrix} C_0 = 1, & C_0^{'} = 0 \\ S_0 = 0, & S_0^{'} = 0 \end{matrix}$

$D(s)$ est appelée ***la fonction de dispersion,*** elle caractérise les propriétés de chromaticité du système optique et elle est définit comme la solution de l'équation :

$$D^{''}(s) + K(s)D(s) = \frac{1}{R(s)} \tag{I.2.26}$$

Avec les conditions initiales $D_0 = D_0^{'} = 0$.

On peut par conséquent écrire :

$$\begin{pmatrix} x \\ x^{'} \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} C & S \\ C^{'} & S^{'} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x^{'} \end{pmatrix}_{s_0} + \frac{\Delta p}{p_0}\begin{pmatrix} D \\ D^{'} \end{pmatrix} \tag{I.2.27}$$

Qui peut aussi être écrite sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x \\ x^{'} \\ \frac{\Delta p}{p_0} \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} C & S & D \\ C^{'} & S^{'} & D^{'} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x^{'} \\ \frac{\Delta p}{p_0} \end{pmatrix}_{s_0} \tag{I.2.28}$$

Le mouvement vertical est décrit de la même manière que(I.2.27) mais sans le dernier terme.

La fonction de dispersion définit le décalage de la trajectoire de la particule par rapport à la trajectoire de référence, elle est donnée par :

$$D(s) = S(s)\int_{s_0}^{s} \frac{1}{R(t)} C(t)dt - C(s)\int_{s_0}^{s} \frac{1}{R(t)} S(t)dt \qquad (I.2.29)$$

En négligeant la dispersion, la Matrice

$$M(s) = \begin{pmatrix} C & S \\ C' & S' \end{pmatrix} \qquad (I.2.30)$$

est la matrice de transfert de la ligne optique.

2.5. Matrices de transfert de quelques éléments :

Dans ce qui suit, on se contentera de donner les matrices de transfert de quelques éléments optiques, plus de détails peuvent être trouvés dans [27] .

Espaces sans champs :

Dans un espace sans champs de longueur L, la divergence d'une particule reste constante et sa position va changer sous l'effet de la divergence comme c'est représenté sur la figure 1.9.

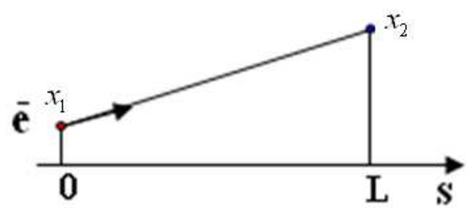


Figure 1.9. Schéma du mouvement transverse d'une particule dans une section sans champ de longueur L.

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + x_1' \cdot L \\ x_2' &= x_1' \end{aligned} \qquad (I.2.31)$$

La matrice R d'un espace sans champs est donnée par :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (I.2.32)$$

Matrice d'un quadrupole

Pour évaluer l'effet du champ d'un quadripôle sur une particule et d'en tirer la matrice R , nous avons besoin de définir les quantités suivantes :

- La rigidité magnétique

$$B\rho = \frac{p}{q} = \frac{m_0 c\beta\gamma}{q} \ (T \cdot m^{-1}) \qquad (I.2.33)$$

Où q est la charge de la particule et p son impulsion.

- le gradient normalisé $k^2(m^{-1})$:

$$k = \sqrt{\left|\frac{B'}{B\rho}\right|} \qquad \text{(I.2.34)}$$

Où B' est le gradient du champ.

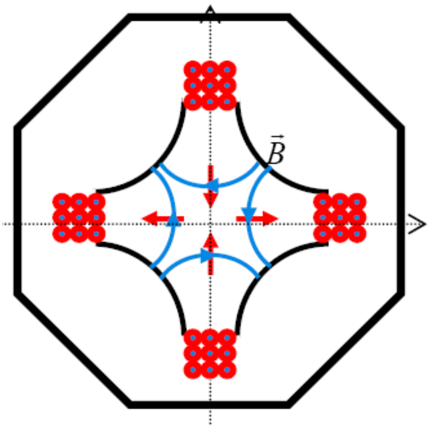


Figure 1.10. Schéma d'un quadrupôle magnétique.

Pour un quadrupole de longueur *L*, La matrice *R* est donnée par

$$R_{xx} = \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{K}L\right) & \frac{1}{\sqrt{K}}\sin\left(\sqrt{K}L\right) \\ \frac{1}{\sqrt{K}}\sin\left(K^{1/2}L\right) & \cos\left(\sqrt{K}L\right) \end{pmatrix}$$

$$R_{yy} = \begin{pmatrix} \cosh\left(\sqrt{|K|}L\right) & \frac{1}{\sqrt{|K|}}\sinh\left(\sqrt{|K|}L\right) \\ \sqrt{|K|}\sinh\left(\sqrt{|K|}L\right) & \cosh\left(\sqrt{|K|}L\right) \end{pmatrix} \qquad \text{(I.2.35)}$$

Approximation lentille mince

Il est parfois utile pour simplifier des problèmes de transport des faisceaux, d'utiliser l'approximation lentille mince d'un quadrupôle. Dans l'approximation lentille mince, un quadrupole (épais) de longueur L et de force K est remplacé par une lentille mince de focale f encadrée de deux sections sans champs de longueur L/2. La matrice de la lentille mince équivalente peut être obtenue à partir de la matrice du quadrupole en faisant tendre L vers zéro et en gardant le produit KL constant. La matrice de la lentille mince s'écrit alors :

pour une lentille mince focalisante

pour une lentille défocalisante

$$Mf = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -KL & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(I.2.36)}$$

$$Md = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ KL & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(I.2.37)}$$

En posant $f = \dfrac{1}{KL}$, les matrices équivalentes d'un quadrupole focalisant et défocalisant respectivement sont donc données par :

$$Mqf = \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Mqd = \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(I.2.38)}$$

Pour généraliser le calcul aux autres plans, les matrices des éléments de la ligne de transport dans ce cas sont des matrices (6x6).
En prenant comme exemple un faisceau focalisé par un quadrupole :

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ l \\ \delta \end{pmatrix}_S = \begin{bmatrix} \cos\left(\sqrt{K}\,L\right) & \frac{1}{\sqrt{K}}\sin\left(\sqrt{K}\,L\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{K}\sin\left(\sqrt{K}\,L\right) & \cos\left(\sqrt{K}\,L\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh\left(\sqrt{K}\,L\right) & \frac{1}{\sqrt{K}}\sinh\left(\sqrt{K}\,L\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{K}\sinh\left(\sqrt{K}\,L\right) & \cosh\left(\sqrt{K}\,L\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ l \\ \delta \end{pmatrix}_{S0}$$

(I.2.39)

2.6. Transport des paramètres du faisceau :

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que les éléments de la ligne de transport (ex : lentilles magnétiques) sont représentés par une matrice qui décrit l'effet du champ magnétique sur la trajectoire de la particule. Le passage d'une particule à travers un système est représenté par l'équation matricielle suivante :

$$X(1) = R\,X(0) \qquad \text{(I.2.40)}$$

Où $X(0)$ Le vecteur des coordonnées initiales
$X(1)$ Le vecteur des coordonnées de la particule à la sortie de l'élément magnétique.
R La matrice à six dimensions représentant l'élément magnétique que traverse la particule. Cette matrice peut être divisée en sous-matrices :

$$R = \begin{pmatrix} R_{xx} & R_{xy} & R_{xz} \\ R_{yx} & R_{yy} & R_{yz} \\ R_{zx} & R_{zy} & R_{zz} \end{pmatrix} \qquad (I.2.41)$$

Le passage à travers plusieurs éléments est décrit par la même équation sauf que dans ce cas *R* est le produit des matrices de chaque élément en partant du dernier.

$$R = R_n.R_{n-1}..R_2.R_1 \qquad (I.2.42)$$

Si le faisceau est représenté par sa matrice *sigma*, le transport du faisceau est traduit par :

$$\sigma(1) = R.\sigma(0).R^t \qquad (I.2.43)$$

La représentation d'un faisceau par les paramètres de Twiss est très utilisée. Dans cette représentation, le faisceau est décrit par le vecteur :

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \qquad (I.2.44)$$

Le paramètre β appelé fonction bétatron nous renseigne sur la taille du faisceau et α sur sa divergence, en tout point de la ligne de transport.

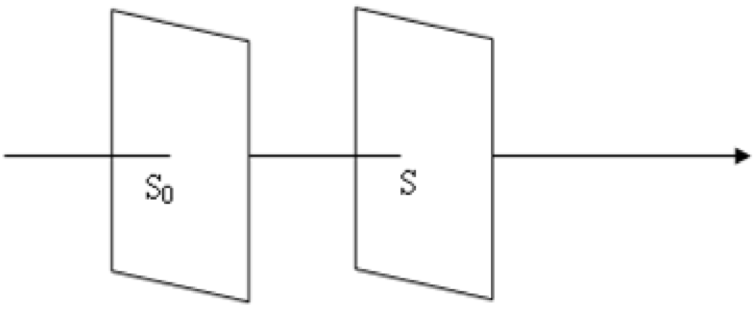


Figure 1.11. Ligne de transport.

Lors du transport du faisceau d'un point s_0 à un point s (figure 1.11), à travers un système ayant comme matrice de transfert

$$M\left(s/s_0\right) = \begin{pmatrix} C & S \\ C' & S' \end{pmatrix} \qquad (I.2.45)$$

Les paramètres de Twiss se transforment par la matrice de transport suivante :

$$\begin{pmatrix} \beta(s) \\ \alpha(s) \\ \gamma(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & -2SC & S^2 \\ -CC' & S'C+SC' & -SS' \\ C'^2 & -2S'C' & S'^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta(s_0) \\ \alpha(s_0) \\ \gamma(s_0) \end{pmatrix} \qquad (I.2.46)$$

Jusque là, nous avons donné toutes les définitions et les conventions ainsi que le formalisme qui nous permettront d'étudier la dynamique transverse d'un faisceau en présence de champs magnétiques. Nous reviendrons sur les aspects de la dynamique du faisceau dans la partie dédiée à l'étude de la source de positrons polarisés où l'on va modéliser l'effet de l'interaction Compton sur les caractéristiques du faisceau sur dix points de collisions Compton.

3. Dynamique longitudinale des électrons dans un anneau en présence d'interaction Compton

A présent nous allons nous intéresser à la dynamique longitudinale dans un anneau en présence de collision Compton. Qui est appelé plus communément LESR (*Laser-Electron Storage Ring*) [34].

L'idée de base des anneaux Compton est qu'un faisceau d'électrons est injecté dans un anneau de stockage et en même temps, un faisceau laser est amplifié dans un résonateur optique. La longueur du résonateur est choisie de manière à s'accorder exactement au temps que met le paquet d'électrons à faire un tour de l'anneau. De cette manière, le paquet d'électrons croise le faisceau laser focalisé au centre du résonateur une fois chaque tour. Il faut noter que dans le cas de l'anneau du projet RADIOTHOMX un seul résonateur optique est nécessaire, cependant dans le cas de la source de positrons polarisés, il en faut plusieurs pour optimiser le rendement.

3.1 Conventions et notions importantes :

Avant de rentrer dans les détails de la dynamique longitudinale dans un anneau de stockage, il faut se fixer quelques conventions et notations et définir les paramètres dont on aura besoin plus loin. Puis nous donnerons les équations les plus importantes régissant le mouvement longitudinal d'une particule dans un anneau de stockage. Une étude plus approfondie peut être trouvée dans les références [28] [30].

3.1.1. La cavité RF :

Une cavité RF est un résonateur métallique où les conditions aux limites permettent l'existence de configurations de champs électromagnétiques oscillants, solution des équations de Maxwell dans le volume de la cavité : ce sont les modes de résonance de la cavité.

Les champs magnétiques des dipôles présents dans l'anneau induisent une accélération centripète. Sous l'effet de cette accélération les électrons perdent de l'énergie par émission de rayonnement synchrotron. Pour garder ces électrons dans l'anneau il faut compenser cette perte d'énergie. La cavité radiofréquence (cavité RF) est utilisée pour compenser l'énergie perdue après chaque tour à l'aide d'un champ électrique longitudinal oscillant sinusoïdalement avec le temps, à une fréquence f_{RF} multiple de la fréquence de révolution des particules dans l'anneau.

La tension accélératrice dans la cavité RF peut être exprimée par [30] :

$$V = V_{rf} \sin \int_0^t \omega_{rf}\, dt' = V_{rf} \sin \varphi(t) \qquad \text{(II.3.1)}$$

Où V_{rf} et ω_{rf} sont respectivement la tension et la fréquence de la cavité RF.

La fréquence RF f_{rf} est égale à un nombre multiple de la fréquence de révolution nominale f_r dans l'anneau

$$f_{rf} = h\ f_r \qquad \text{(II.3.2)}$$

h est appelé ***nombre d'harmonique.***

3.1.2. La particule synchrone

La particule pour laquelle la perte en énergie par rayonnement synchrotron sur un tour est exactement compensée par la cavité RF est appelée ***particule synchrone***. Elle définit l'énergie nominale $\boldsymbol{E_0}$ de l'anneau. Cette particule est prise comme référence pour l'étude du mouvement longitudinal des particules dans le paquet.

La particule synchrone va toujours avoir la même phase RF, appelée la phase synchrone, en passant dans la cavité RF :

$$\varphi(t) = \varphi_s \qquad \text{(II.3.3)}$$

3.1.3. Coordonnées longitudinales

En dynamique longitudinale, la position de circulation de la particule synchrone dans un paquet d'électrons est une référence pratique pour l'étude des oscillations longitudinales des électrons dans le paquet. La position de la particule synchrone est donc considérée comme la position de référence, la position instantanée des autres particules est donnée par le déplacement longitudinal Δs par rapport à la position de cette particule (figure 1.12) :

$$\Delta s(t) = s(t) + s_0(t) \qquad \text{(II.3.4)}$$

Où s est la position longitudinale de l'électron et s_0 est la position du centre

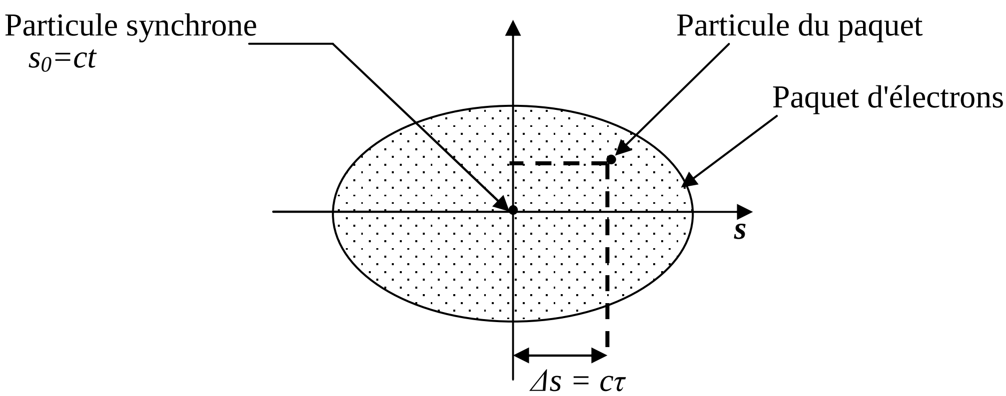


Figure 1.12. Les coordonnées longitudinales *s* et *τ* d'un électron dans le paquet.

Au lieu de sa position spatiale *s*, il est plus usuel de décrire le mouvement longitudinal d'une particule avec sa position temporelle τ par rapport au centre défini simplement par :

$$\tau(t) = \frac{\Delta s(t)}{c} \qquad \text{(II.3.5)}$$

c étant la vitesse de la lumière

Une particule est généralement représentée dans l'espace longitudinal par deux coordonnées :

- $\Phi=\varphi-\varphi_s$ la différence de phase par rapport à la phase de la particule synchrone et

- $\delta E = E - E_s$ la différence d'énergie par rapport à l'énergie de la particule synchrone.

3.1.4. Le facteur de compression des moments

Par définition, le facteur de compression des moments α_1 est la constante qui relie la variation de la longueur de l'orbite d'une particule par rapport à l'orbite de référence, dans un accélérateur circulaire, à la variation de l'impulsion (dispersion en énergie).
Le paramètre α_1 est donné par :

$$\alpha_1 = \frac{p}{L}\frac{dL}{dp} = \frac{P}{R}\frac{dR}{dp} \qquad \text{(II.3.6)}$$

Où *p*, *L* et *R* sont respectivement le moment de la particule, la circonférence de l'anneau et le rayon physique de l'anneau ($2\pi R = L$).
Le facteur de compression des moments est nul lorsque la longueur de la trajectoire d'une particule ne dépend pas de sa quantité de mouvement. Cette variation est induite au premier ordre par les dipôles magnétiques.
Dans un anneau Compton, une particule est soumise à quatre effets : l'avance de phase due à la compression des moments, la perte ou le gain d'énergie dans la cavité RF, la perte d'énergie par rayonnement synchrotron et en fin la perte d'énergie par interaction Compton.

4. Equations de Sands

La dynamique longitudinale d'une particule dans ce cas, est régie par les équations de Sands auxquelles nous avons rajouté un terme exprimant l'effet de l'interaction Compton.

$$\begin{cases} \Phi_{n+1} = \Phi_n + \Delta\Phi \\ \sigma_{\varepsilon n+1} = \sigma_{\varepsilon n} + U_{rf} + U_{SR} + U_{random} + U_{Compton} \end{cases} \qquad \text{(II.4.1)}$$

Où Φ est la phase de la particule et σ_ε est l'écart de son énergie normalisée à l'énergie de la particule synchrone. Et $\Delta\Phi$ est l'avance de phase subite par la particule
U_{rf} traduit l'effet de la cavité RF.
U_{SR} traduit l'effet du rayonnement synchrotron.
U_{rand} est introduit pour tenir compte du caractère aléatoire de l'émission du rayonnement.
$U_{compton}$ est la contribution de l'interaction Compton.
Exprimons à présent tous ces termes individuellement :

4.1. Avance de phase

Après un tour de l'anneau, chaque particule subit une avance de phase selon l'équation :

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= -k_1\sigma_\varepsilon \\ k_1 &= 2\pi H\alpha_1; \end{aligned} \qquad \text{(II.4.2)}$$

Où l'on n'a considéré que le terme linéaire du facteur de compression des moments.

4.2. La cavité RF

Le gain en énergie par tour dans la cavité RF est donné par :

$$(\Delta E)_{tour} = eV_{rf}\sin\varphi_s \qquad \text{(II.4.3)}$$

Où V_{rf} est le potentiel électrique crête de la cavité et *e* la charge d'un électron.

Dans le cas de la particule synchrone, l'énergie perdue par tour U_0 est égale au gain en énergie fourni par la cavité [28] [29].

Lorsque la particule entre dans la cavité RF sa déviation en énergie normalisée par rapport à l'énergie de la particule synchrone s'écrit :

$$U_{rf} = \frac{eV}{E_0}\cos\left(\underbrace{\arccos\left(\frac{U_0}{V_{rf}}\right)}_{\Phi_s} - \Phi\right) \quad \text{(II.4.4)}$$

4.3. Amortissement synchrotron

L'énergie perdue par tour par la particule synchrone est donnée par :

$$U = \frac{C_\gamma}{2\pi} E_0^4 I_2 \quad \text{(II.4.5)}$$

avec $C_\gamma = 8.846\ 10^{-5} m.GeV^{-3}$. I_2 est la deuxième intégrale synchrotron [29] [30].

Les variations de l'écart en énergie $\Delta\sigma_\varepsilon$ et de la coordonnée *s* de la particule sur un tour en incluant le terme de perte d'énergie dans l'anneau sont données par [30] [32] :

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_\varepsilon &= \frac{eV_{RF}}{E_0}\sin\left(\varphi_s - \frac{\omega_{RF}s}{c}\right) - \frac{U}{E_0} \\ \Delta s &= -\alpha_1 L \sigma_\varepsilon \end{aligned} \quad \text{(II.4.6)}$$

Où *L* est la longueur de l'anneau et α_1 est le facteur de compression des moments.

On en déduit les équations du mouvement longitudinal d'une particule dans l'anneau en présence de rayonnement synchrotron :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_\varepsilon}{dt} &= \frac{eV_{RF}}{E_0 T_0}\sin\left(\varphi_s - \frac{\omega_{RF}s}{c}\right) - \frac{U}{E_0 T_0} \\ \frac{ds}{dt} &= -\alpha_1 c \sigma_\varepsilon \end{aligned} \quad \text{(II.4.7)}$$

$\frac{\omega_{rf}s}{c} \ll 1$, la perte d'énergie dépend de l'énergie de la particule, on peut alors écrire :

$$U = U_0 + \Delta E \left.\frac{dU}{dE}\right|_{E=E_0} = U_0 + E_0\sigma_\varepsilon \left.\frac{dU}{dE}\right|_{E=E_0} \quad \text{(II.4.8)}$$

En supposant des déplacements *s* petits par rapport à la longueur d'onde RF $\frac{\omega_{rf}s}{c} \ll 1$

En combinant ces deux dernières équations(II.4.7) et (II.4.8) on obtient :

$$\frac{d^2\sigma_\varepsilon}{dt^2} + 2\alpha_E\frac{d\sigma_\varepsilon}{dt} + \omega_s\sigma_\varepsilon = 0 \quad \text{(II.4.9)}$$

On peut procéder de la même manière pour exprimer l'équation régissant la variation de la position temporelle des particules dans le paquet, on obtient alors :

$$\frac{d^2\sigma_\tau}{\partial t^2}+2\alpha_E\frac{d\sigma_\tau}{dt}+\omega_s\sigma_\tau=0 \qquad \text{(II.4.10)}$$

Les équations(II.4.9) et (II.4.10) sont les équations de mouvement d'un oscillateur harmonique amorti. La fréquence d'oscillation ω_s et la constante d'amortissement α_E sont données par :

$$\omega_s^2=-\frac{eV_{RF}}{E_0}\cos\varphi_s\frac{\omega_{RF}}{T_0}\alpha_p$$

$$\alpha_E=\frac{1}{2T_0}\frac{dU}{dE}\Big|_{E=E_0} \qquad \text{(II.4.11)}$$

α_E est donné en fonction des intégrales synchrotron par : $\alpha_E=2+\frac{I_4}{I_2}$

La solution de l'équation (II.4.9) et (II.4.10) sont de la forme :

$$\sigma_\varepsilon=Ae^{-t/\tau_s}\sin\left(\sqrt{\omega_s^2-\frac{4}{\tau_s^2}}+\varphi\right)$$

$$\tau(t)=A'e^{-t/\tau_s}\cos(\omega_s t+\theta_0) \qquad \text{(II.4.12)}$$

Où $\tau_s=\frac{1}{\alpha_E}$ est le temps d'amortissement longitudinal.

L'équation (II.4.10) rend compte de l'amortissement synchrotron, cet effet conduit les particules à suivre des trajectoires en forme de spirales autour de la particule synchrone .

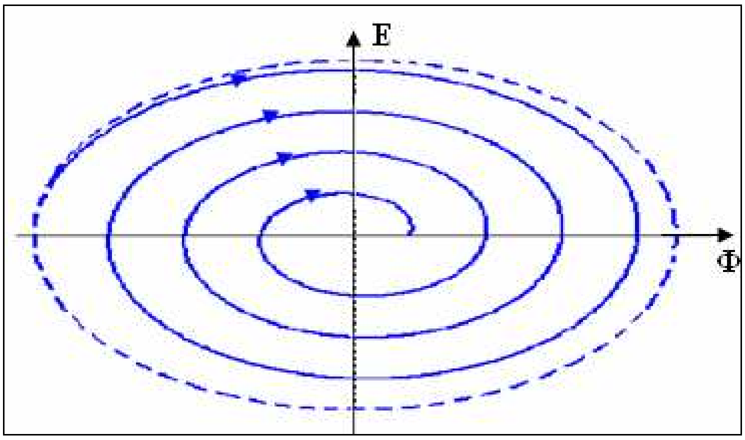


Figure 1.13. Diagramme de phase.
--- Trajectoire de la particule en absence d'amortissement.
__ Trajectoire de la particule en présence d'amortissement.

En réalité, l'émission de rayonnement synchrotron est un effet quantique, cela consiste en l'émission d'un nombre discret de photons dont l'énergie et les temps d'émission sont statistiquement indépendants. En tenant compte de l'amortissement et de l'excitation quantique, chaque électron voit sa déviation en énergie normalisée varier selon l'équation :

$$U_{rad} = U_{SR} + U_{random} = -\alpha_E \sigma_\varepsilon - \frac{U_0}{E_0} - \frac{1}{E_0}\left(G\delta\sqrt{2\alpha_E}\right) \qquad \text{(II.4.13)}$$

$\sigma_{\varepsilon i}$ désigne la déviation de l'énergie de la particule avant la perte d'énergie par rayonnement synchrotron, α_E est le facteur d'amortissement et G est un nombre aléatoire obéissant à une loi gaussienne avec une déviation standard égale à un et une valeur moyenne de zéro. Le facteur G est nécessaire pour que la fonction de distribution de l'énergie soit gaussienne. δ est la dispersion en énergie du faisceau.

4.4. Effet de l'interaction Compton sur la dynamique longitudinale dans un anneau :

D'après ce que l'on a vu dans la section précédente, dans un anneau, en l'absence de faisceau laser, le faisceau d'électrons doit s'amortir au bout d'un certain temps de l'ordre du temps d'amortissement τ_S. Mais en présence du laser la dynamique longitudinale se voit influencée.

En tenant en compte la probabilité d'interaction, la variation de la dispersion en énergie des particules ayant subit une interaction est donnée par :

$$U_{compton} = \frac{E_\gamma}{E_0} - \frac{E_\gamma'}{E_0} \qquad \text{(II.4.14)}$$

Où E_γ est l'énergie des photons incidents et E_γ' est l'énergie des photons diffusés.

Les équations de Sands définissant la dynamique longitudinale d'une particule tour après tour dans un anneau Compton peuvent alors s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \Phi_{n+1} = \Phi_n - 2\pi H \alpha_1 \sigma_{\varepsilon n+1} \\ \sigma_{\varepsilon n+1} = \sigma_{\varepsilon n} + \underbrace{\frac{eV}{E_0}\cos\left(\underbrace{\arccos\left(\frac{U_0}{V_{rf}}\right)}_{\Phi_s} - \Phi\right)}_{U_{RF}} \underbrace{-\alpha_E \sigma_{\varepsilon n} - \frac{U_0}{E_0}}_{U_{SR}} \underbrace{-\frac{1}{E_0}\left(G\delta\sqrt{2\alpha_E}\right)}_{U_{random}} + \underbrace{\frac{E_\gamma}{E_0} - \frac{E_\gamma'}{E_0}}_{U_{compton}} \end{cases} \qquad \text{(II.4.15)}$$

5. Emittance d'équilibre

Sous l'effet de l'amortissement des oscillations synchrotron, les électrons devraient se regrouper de plus en plus dans un volume tendant vers zéro autour de la particule synchrone. Cependant, l'émission de rayonnement synchrotron est un phénomène aléatoire et quantifié. L'émittance du faisceau d'électrons dans ce cas est caractérisée par les deux phénomènes antagonistes : amortissement synchrotron et l'excitation quantique [30] [29]. L'émittance du faisceau de particules est donnée par l'équilibre entre l'excitation quantique, qui tend à augmenter l'émittance, et l'amortissement des oscillations, qui tend à réduire l'émittance. En tenant compte de ces deux phénomènes l'émittance d'équilibre est donnée par :

$$\varepsilon_0 = \frac{C_q \gamma^2 \left\langle H_x / \rho^3 \right\rangle}{\left\langle 1/\rho^2 \right\rangle} = C_q \gamma^2 \frac{I_5}{J_x I_2} \qquad \text{(II.5.1)}$$

La dispersion de l'énergie à l'équilibre est donnée par :

$$\sigma_\varepsilon^{\ 2} = C_q \gamma^2 \frac{I_3}{\alpha_E I_2} \qquad \text{(II.5.2)}$$

Où C_q=3.832 10^{-13} *m*. γ est le facteur Lorentz

I_2, I_3, I_4 et I_5 intégrales synchrotron [28] [30].

Les équations que nous avons décrites dans cette section nous serviront pour étudier la dynamique longitudinale du faisceau dans un anneau Compton. Cette étude va nous permettre de choisir les bons paramètres des deux faisceaux d'électron et laser et de la machine RADIOTHOMX qui permettront d'atteindre le flux de rayons X désiré.

Chapitre 2. Source de positrons polarisés

1. Production des rayons gamma *:*

Pour produire des positrons polarisés, deux schémas sont pris en considération. Dans les deux cas des photons polarisés circulairement sont produits puis envoyés sur une cible pour produire des positrons par conversion de paires [35]. Les photons produits peuvent avoir une énergie allant de quelques *MeV* à une centaine de *MeV*.

Les deux méthodes considérées pour la production des photons polarisés sont :

- Source basée sur un onduleur : Un faisceau de haute énergie (150 *GeV*) passant dans un onduleur hélicoïdal. Cette méthode sera décrite brièvement car ce n'est pas le cas qui nous intéresse. L'expérience E-166 développée à SLAC [36] , est une démonstration de ce schéma.
- Source basée sur la diffusion Compton : La rétrodiffusion d'un faisceau laser très puissant polarisé circulairement par un faisceau d'électrons de quelques *GeV* d'énergie [35] [37] [38] . Cette méthode est testée par l'expérience développée à KEK au Japon [47] [49].

Quelque soit la méthode utilisée, un taux de polarisation de positrons d'environ 40% à 60% est exigé pour l'ILC [39].

Mis à part l'avantage évident de produire des positrons polarisés, le schéma de production de positrons par des photons a plusieurs avantages comparé à une source conventionnelle non polarisée utilisant la cascade d'interactions du faisceau d'électrons dans une cible [42]. En voici quelques uns :

- Dans les deux schémas utilisant les photons, la cible peut être plus fine et donc il est possible d'utiliser des matériaux de nombre atomique Z moins élevé comme les alliages de Titane, par conséquent le problème d'échauffement de la cible est évité.
- L'énergie des photons peut être choisie plus basse que la section efficace de photo production de neutrons, l'activation de la cible peut alors être largement réduite.

- Il est plus facile d'atteindre de grandes quantités de positrons. C'est un facteur très important car la charge des paquets de positrons requise par l'ILC est d'un facteur 10^3 plus large que celle produite par la source conventionnelle de SLC [44].

1.1. Production de positrons polarisés dans une cible

Lorsque les photons polarisés interagissent avec la cible, ils provoquent une cascade à la suite de créations de paires. L'aspect le plus intéressant de l'interaction entre les photons et les milieux matériels est la corrélation entre la polarisation des photons primaires et le spin des paires électron-positron produites [40]. Lorsqu'un photon polarisé circulairement génère une pair e^+e^- dans une cible fine, l'état de polarisation de ce photon est transmis aux particules résultantes selon la section efficace dérivée par Olsen et Maximon en 1959 [43].

La figure 2.1. montre (a) la section efficace et (b) la polarisation des rayons gamma diffusés par interaction Compton en fonction de l'énergie des rayons gamma [41]. Un degré élevé de polarisation (hélicité h = 1 dans ce cas) est prévue pour les rayons gamma rétrodiffusés de haute énergie (près de la fin du spectre).

En utilisant les distributions de l'énergie et la polarisation données sur la figure 2.1 (a) les sections efficaces de création de pair et de la polarisation des positrons sont calculées. La figure 2.2 indique qu'une polarisation de 80% peut être atteinte, si les positrons d'énergie supérieure à 23 *MeV* sont sélectionnés [41][42].

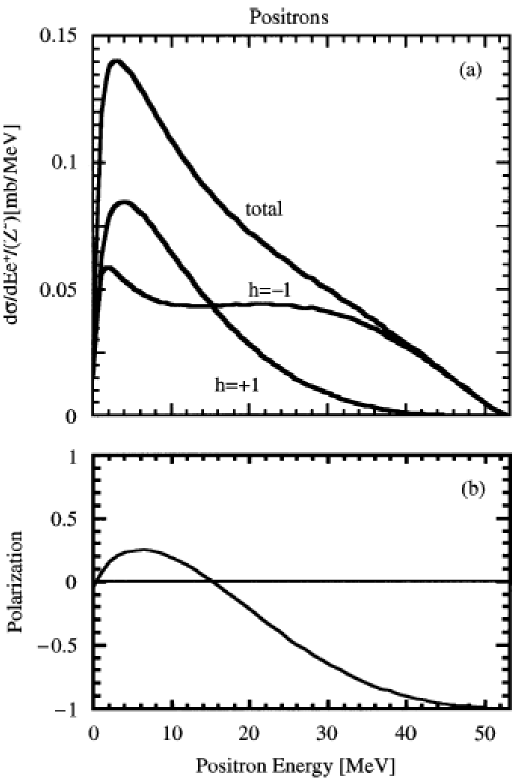


Figure 2.2 (a) Distribution d'énergie des positrons produits par création de paire. (b) Polarisation des e^+ s en fonction de leur énergie [41].

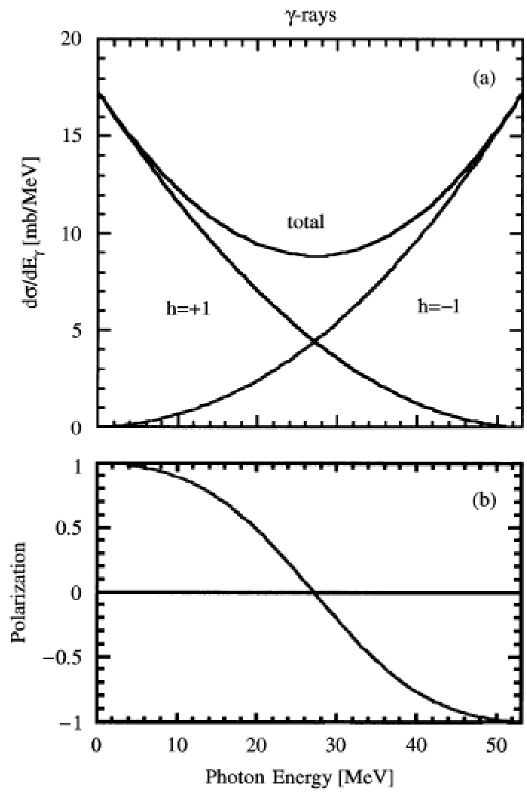


Figure 2.1 (a) Distribution d'énergie des photons émis par diffusion Compton d'un laser polarisé circulairement sur un faisceau d'électrons. h=représente l'état d' hélicité photons. (b)Polarisation des rayons gamma en fonction de leur énergie [41].

Le spin des particules produites est relié à leur énergie. Par conséquent, le contrôle du transfert de l'hélicité revient à une sélection en énergie.

1.2. Source de positrons polarisés basée sur un onduleur :

L'idée de production de positrons polarisés par des radiations produites dans un onduleur hélicoïdal a été proposée en 1979 par Balakin et Mikhailichenko [45].

Plutôt que d'utiliser des faisceaux d'électrons sur des cibles épaisses, qui exigent de très hautes énergies, il est possible d'utiliser les photons provenant d'un onduleur hélicoïdal (figure 2.4.) pour générer des positrons par création de paires dans une cible **(**figure 2.3**.)**. Cette méthode nécessite un faisceau d'électrons d'une centaine de *GeV*.

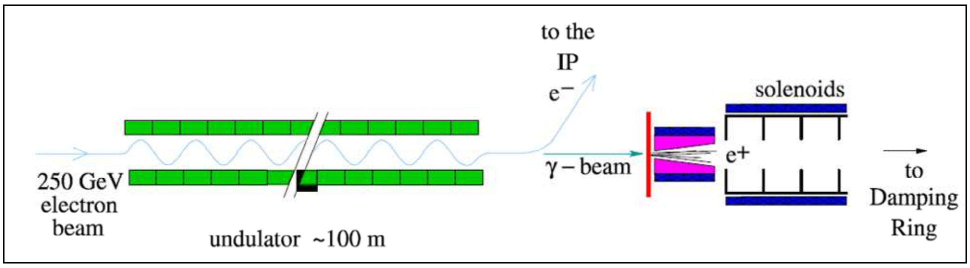


Figure 2.3. Schéma de production de positrons polarisés basé sur un onduleur.

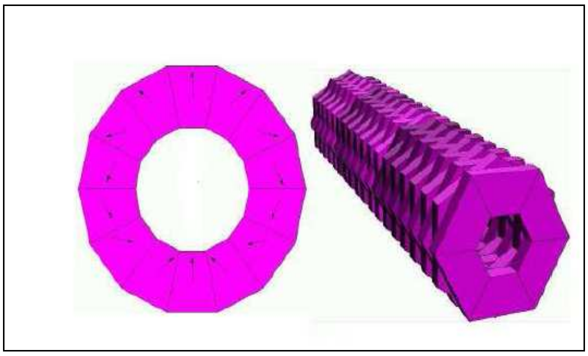


Figure 2.4. Exemple d'onduleur hélicoïdal.

Pour l'ILC, il a été proposé d'utiliser le faisceau de l'accélérateur linéaire principal (main Linear Accelerator) d'environ 150 *GeV*. Le faisceau de faible émittance est ensuite transporté dans un onduleur hélicoïdal d'environ 200 mètres de long. Les électrons sont déviés par un aimant secteur, accélérés dans un accélérateur linéaire puis envoyés au point d'interaction. Les photons produits dans l'onduleur sont collimatés et envoyés sur une cible fine pour produire des positrons polarisés (figure 2.5).

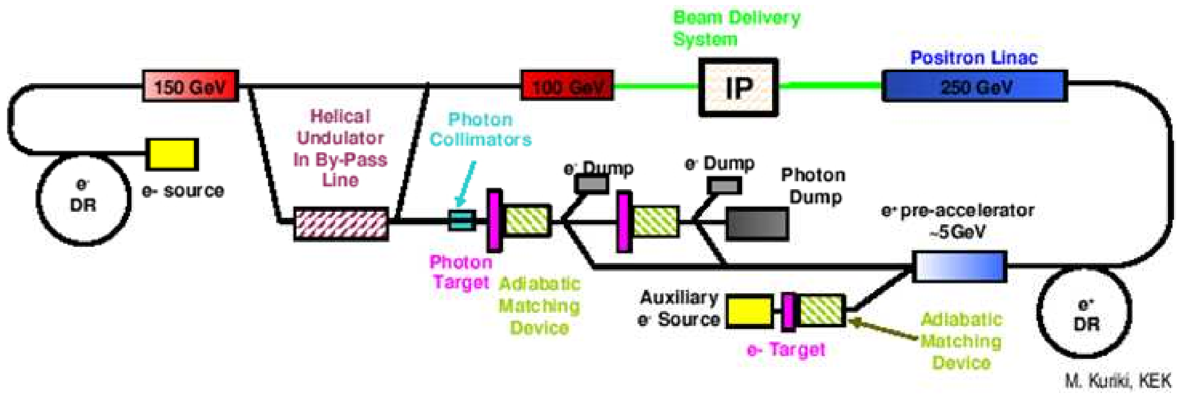


Figure 2.5. Schéma de production de positrons polarisés basé sur un onduleur sur l'ILC.

Le principe de production de positrons polarisés basée sur un onduleur a été validé par l'expérience E-166 à SLAC [46]. Cette expérience a été destinée à démontrer le processus de génération de photons polarisés dans un onduleur hélicoïdal et la production de positrons polarisés par création de paires dans une cible fine par ces mêmes photons.

Tableau 2-1. montre une comparaison des paramètres de quelques designs et leurs performances en termes de polarisation de positrons produits.

.

Paramètre	TESLA	USLCTOS	E-166
Énergie du faisceau, Ee [GeV]	150-250	150	50
Ne/paquet	3×10^{10}	2×10^{10}	1×10^{10}
Npaquets/pulse	2820	2820	1
Pulses/s [Hz]	5	5	30
Type d'onduleur	Plan./hélicoïdal	hélicoïdal	hélicoïdal
Paramètre de l'ond. K	1	1	0.17
Période ond., λu [cm]	1.4	1.0	0.24
Longueur ond., L [m]	135	200	1
Harmon.1, Ec10 [MeV]	9-25	11	9.6
Matériau de la cible.	Alliage Ti	Alliage Ti	Alliage Ti, W
Épaisseur de la cible [rad. len.]	0.4	0.4	0.25-0.5
Pol. Positrons. [%]	0	59	53

Tableau 2-1. Paramètres des positrons dans les expériences TESLA, USLCTOS et E-166.

1.3. Source de positrons polarisés basée sur la diffusion Compton :

Les positrons polarisés peuvent être aussi créés par une méthode à base de laser, où les photons polarisés circulairement sont obtenus par la rétrodiffusion du faisceau laser polarisé circulairement sur un faisceau d'électrons. Ces photons (rayons gamma) polarisés circulairement sont ensuite utilisés pour générer des positrons polarisés longitudinalement via la création de paires dans une cible mince (figure 2.6), de la même manière que dans le cas du schéma basé sur l'onduleur.

Différents schémas ont été proposés, tous exigeant des manipulations complexes des faisceaux d'électrons et des lasers de puissance [47].

Les avantages de ces sources par rapport aux autres sources sont :

- Elles peuvent être exploitées indépendamment de l'accélérateur linéaire principal. Cette caractéristique permet d'éviter les problèmes dus à la dépendance des deux accélérateurs linéraires (électrons et positrons).
- L'indépendance du système par rapport aux autres parties de l'accélérateur donne plus de flexibilité pour changer la structure du faisceau, intensité, etc…
- La performance du système de production des positrons peut être améliorée par l'introduction de nouvelles technologies (comme l'introduction d'un résonateur optique pour l'obtention de plus de puissance laser).
- Il n'y a aucune limitation pour le fonctionnement à basse énergie sur l'ILC. Des interactions à des énergies allant de 5 *GeV* jusqu'à 250 *GeV* peuvent être obtenues facilement sans le moindre surcoût.
- Un autre avantage très important de cette méthode est le fait qu'il n'y ait pas d'intervention sur le faisceau principal.

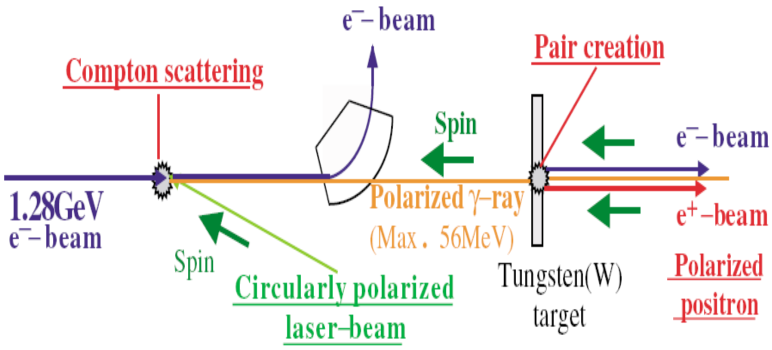


Figure 2.6. Schéma de production de positrons polarisés basés sur l'interaction Compton.

1.4. Schéma proposé à la conférence snowmass 2005 :

La proposition de schéma de source de positrons polarisés basée sur l'interaction Compton pour l'ILC a été soumise en 2005 [49]. La figure 2.7. présente le plan complet du schéma de production de positrons polarisés proposé. Les électrons sont injectés dans l'anneau Compton (Compton ring) par un accélérateur linéaire. Afin de rejoindre les exigences de l'ILC en charge de positrons (Tableau 2-2.), les paramètres proposés sont les suivants :

Un faisceau d'électrons de 1,3 *GeV* est envoyé dans un anneau de stockage de 277 *m* de circonférence. Le faisceau est constitué de 280 paquets. Le nombre d'électrons par paquet est Ne=6.2 10^{10}/paquet. Sur la section droite de l'anneau de stockage sont disposées 30 cavités optiques de 600 *mj* chacune. Le faisceau d'électrons et le faisceau laser interagissent avec un angle de croisement de 8°. L'interaction Compton entre le laser et le faisceau d'électrons produit un nombre de rayons gamma Ng =1,36 10^{10}/tour/paquet d'une énergie comprise entre 23 *MeV* et 29 *MeV*. Les photons produits de cette interaction bombardent la cible et produisent des positrons polarisés, le rendement et $Ne+/Ng$=1.4%, ce qui fait un nombre de positrons Ne+=1,9 10^{8}/paquet. Derrière la cible, les positrons sont capturés dans une section de capture puis accélérés par un accélérateur linéaire à 5*GeV*, puis ils sont injectés dans l'anneau d'amortissement. Avec 10 empilements, le nombre de positrons atteint $Ne+$= 1,9 10^{9} /paquet en recommençant l'opération dix fois on atteint $Ne+$=1,9 10^{10}. Enfin les positrons sont envoyés dans l'accélérateur principal.

Paramètre	**Symbole**	**Valeur**	**Unité**
Positrons par paquet	*Np*	2x10^{10}	e+
Paquet par pulse	*Nb*	2820	
Espacement entre paquets	*Tb*	~300	ns
Taux de répétition des pulses	*Frep*	5	Hz
Polarisation des positrons	*Pp*	~60	%

Tableau 2-2. Paramètres des faisceaux d'électrons et positrons de l'ILC.

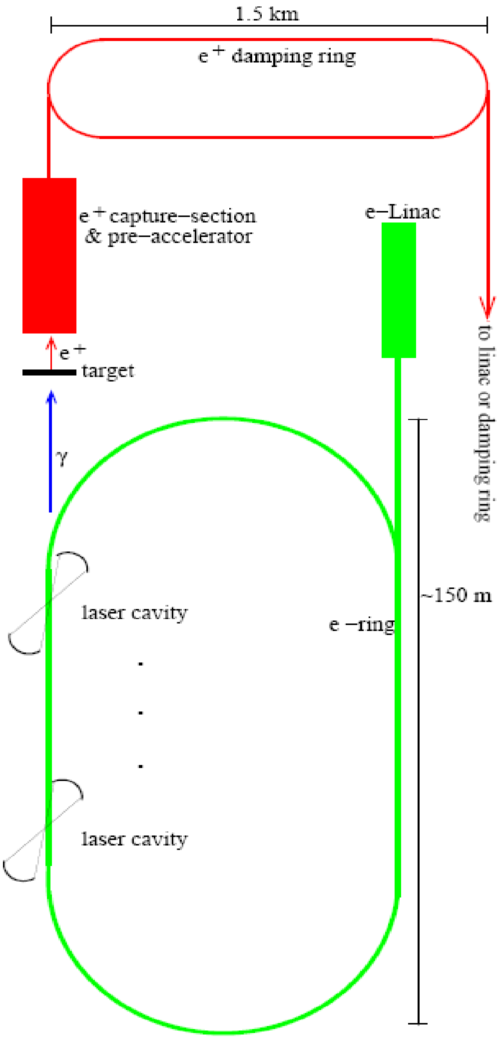


Figure 2.7 Production de positrons polarisés : proposal snowmass 2005.

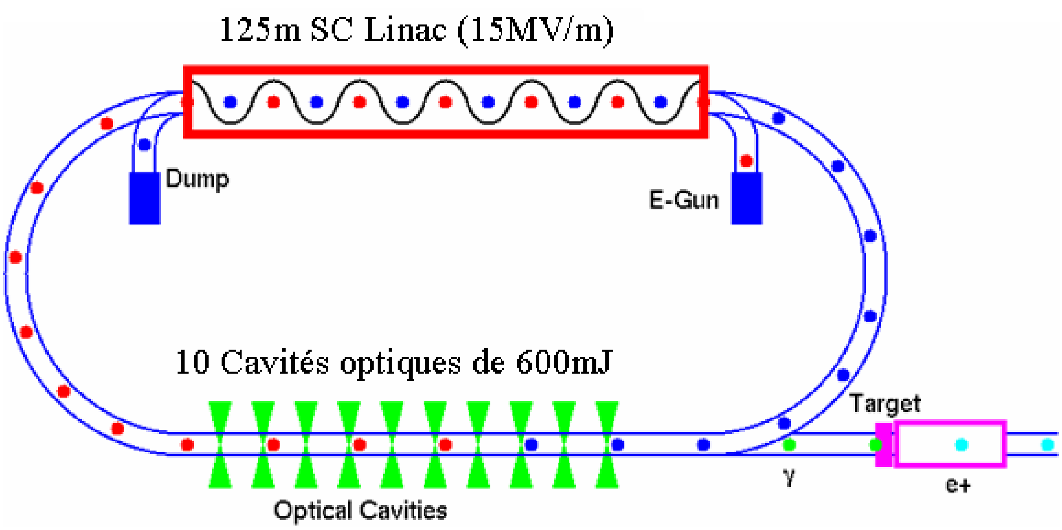


Figure 2.8 Production de positrons polarisés dans un ERL.

Les paramètres liés à la source de positrons polarisés basée sur l'interaction Compton sont sujet à des modifications suivant les études et les R&D récentes. Dans [50], les paramètres du système de production des positrons polarisés ont été énoncés. Après la conférence Posipol 2008, la possibilité d'avoir un anneau d'amortissement primaire (*pré-damping ring*) pour les positrons polarisés a été étudiée. La figure 2.9 représente le schéma global de la source de positrons polarisés proposé avec tous les paramètres.

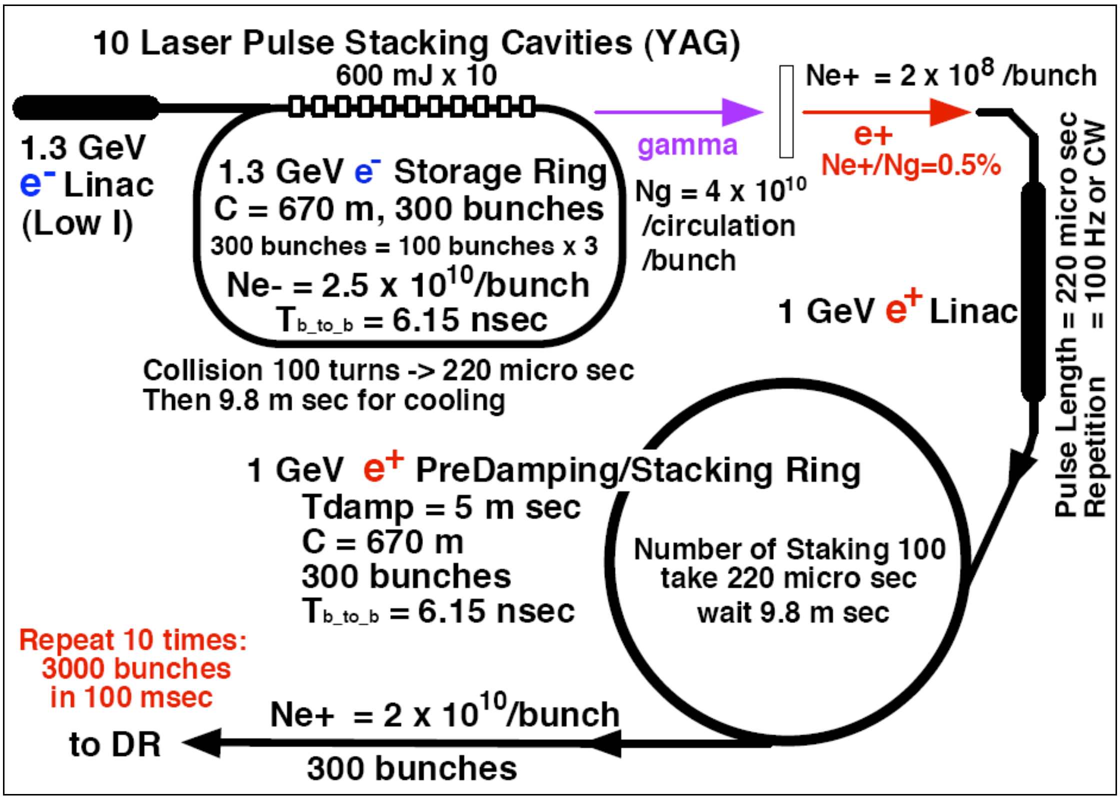


Figure 2.9. Schéma de la source de positrons polarisés proposé après Posipol 2008

(1) anneau de stockage (anneau Compton) de 1,3 *GeV*.
(2) 10 cavités laser avec un laser de $1\mu m$ de longueur d'onde.
(3) Accélérateur linéraire de 1,3 *GeV*.
(4) Une cible de conversion et un système de capture
(5) Accélérateur linéraire de 1 *GeV*.
(6) Un anneau de 1*GeV* pour un pré amortissement et le stockage de positron (pre-damping/stacking).

La description de chacun de ces éléments est donnée ci-dessous (les chiffres donnés ici sont approximatifs) :

(1) anneau de stockage (anneau Compton) de 1,3 *GeV* : l'énergie du faisceau d'électrons est de 1.3 *GeV*. La circonférence de cet anneau est d'environ 670 *m*. 300 paquets sont stockés dans l'anneau. Le nombre d'électrons dans chaque paquet est supposé être de 2,5 10^{10}. Les 300 paquets sont divisés en 3 trains de 100 paquets chacun. L'espacement entre train est de 70 *ns* et l'espacement entre paquets de chaque train est de 6,15ns. La longueur d'un paquet au point d'interaction est de 1*ps*. Cet anneau

possède une longue section droite sur laquelle il y a dix points de collision. La taille du faisceau d'électrons aux points de collisions est de 10µm (taille rms en horizontal et en vertical). En chaque point de collision se trouve une cavité optique.

(2) Les cavités optiques : dix cavités optiques, qui sont des cavités Fabry Pérot de haute finesse [52], sont insérées dans la section droite de l'anneau de stockage. La puissance stockée dans chaque cavité est de 600 *mj*. La taille du faisceau laser est supposée de 10 μm (rms) dans les deux plans vertical et horizontal.

(3) L'accélérateur linéaire de 1,3 *GeV*: Il assure l'injection dans l'anneau de stockage.

(4) La cible de conversion et la section de capture : seuls les positrons de haute énergie sont capturés. Le taux de capture $Ne+/Ng$ =0.5%.

(5) L'accélérateur de 1GeV : la structure du pulse dans l'Accélérateur linéraire est soit continue "CW", soit pulsée avec une fréquence de 100 *Hz* x 220μs de durée d'impulsion.

(6) Anneau de pré-amortissement (pre-damping) : l'anneau sert à l'amortissement des positrons et leur stockage. C'est un anneau de 670 *m* de circonférence où 300 paquets de positrons sont stockés. Ces paquets sont divisés en 3 trains de 100 paquets. L'espacement entre paquets est de 6,15 ns et l'espacement entre trains est d'environ 70 *ns*. Le temps d'amortissement de cet anneau est court (Tdamp ~ 5*ms*).

Les points qui vont suivre expliquent comment avoir le nombre nécessaire de positrons

(a) 300 paquets circulent dans l'anneau Compton et le nombre d'électrons dans chaque paquet est de 2,5 10^{10}, la circonférence est de 670 *m*. A partir d'un faisceau d'électron on obtient 300 paquet de rayons gamma. Le nombre de gamma obtenu sur dix points de collisions est égal à 4 10^{10} gamma/paquet/tour avec 2.2 μs /un tour. On obtient 2 10^{8} positrons/paquet de rayons gamma (avec une efficacité e+/gamma= 0.5 %) avec un nombre de paquets de 300. Ces 300 paquets de positrons sont envoyés dans l'anneau de pre-damping,
(b) si les 300 paquets d'électrons sont recirculés 100 fois dans l'anneau Compton, ce qui prend 220μs, cela signifie que nous avons besoin d'empiler 100 fois des paquets dans le même bucket de l'anneau de pre-damping. Après 100 empilements, la population de positrons dans chaque paquet est de 2 10^{10},
(c) 9,8 ms sont nécessaire pour l'amortissement dans l'anneau de pre-damping. Le temps d'amortissement dans cet anneau est de 5*ms*,
(d) 300 paquets de positrons sont envoyés de l'anneau de pre-damping à l'anneau d'amortissement principal (DR). Le processus est répété 10 fois dans le but de stocker 3000 paquets dans le DR. Il n'y a pas d'empilement dans cet anneau.
Ce processus met 100 *ms* et le DR a 100 *ms* pour l'amortissement.

1.5. La configuration ERL (Energy Recovery Linac)

Les collisions entre des électrons et laser sont à l'origine de l'allongement du faisceau et peuvent produire une déformation de sa distribution longitudinale et transverse. En raison de cet effet, le taux des rayons gamma diffusés diminue au cours du temps. Une façon de remédier à ce problème, est d'éteindre le laser de sorte que le paquet puisse tourner dans l'anneau sans interagir avec le laser et ainsi s'amortir sous l'effet du rayonnement synchrotron. Une autre configuration envisagée est d'utiliser un accélérateur linéaire à récupération d'énergie ERL (*Energy Recovery Linac*) à la place de l'anneau et de placer des cavités optiques sur une section droite de celui-ci (figure 2.8.).

1.5.1. Schéma d'un ERL

Les propriétés fondamentales des faisceaux de rayons X provenant des sources à anneau de stockage, comme la taille et la durée des impulsions, sont limitées par la caractéristique de l'équilibre dynamique de la structure magnétique qui constitue l'anneau de stockage [30]. Le fait que le temps d'équilibre caractéristique est long et implique des milliers d'orbites autour de l'anneau est important. Les ERL préservent ces propriétés, par une accélération au moyen d'un accélérateur linéaire supraconducteur suivi par une boucle de retour pouvant abriter des dispositifs d'insertion, comme dans le cas d'un anneau de stockage. La boucle renvoie les paquets, dont la phase est décalée de 180° de la phase d'accélération, pour être décélérés dans l'accélérateur linéaire puis éjectés. Ainsi, l'énergie du faisceau d'électrons est recyclée dans le champ RF de l'accélérateur linéaire pour que de nouveaux paquets soient accélérés.

Les parties principales d'un ERL sont (cf. figure 2.10.) : le photoinjecteur, l'accélérateur principal, la boucle de renvoie et l'arrêtoir du faisceau.

- Le photoinjecteur utilise une photocathode irradiée par laser pour produire les paquets d'électrons par effet photoélectrique. Ces électrons sont ensuite accélérés puis injectés dans l'accélérateur principal. Ainsi la performance de l'ERL dépend de la capacité du photoinjecteur à produire des paquets avec une petite émittance, une charge, une taille et dispersion d'énergie acceptables du paquet.
- L'accélérateur linéraire principal sert à accélérer le paquet et aussi à récupérer l'énergie des paquets.
- La boucle de renvoie permet le transport du faisceau.
- Après avoir été décéléré dans l'Accélérateur linéraire et son énergie récupérée, le paquet est ensuite transporté dans l'arrêtoir (Dump).

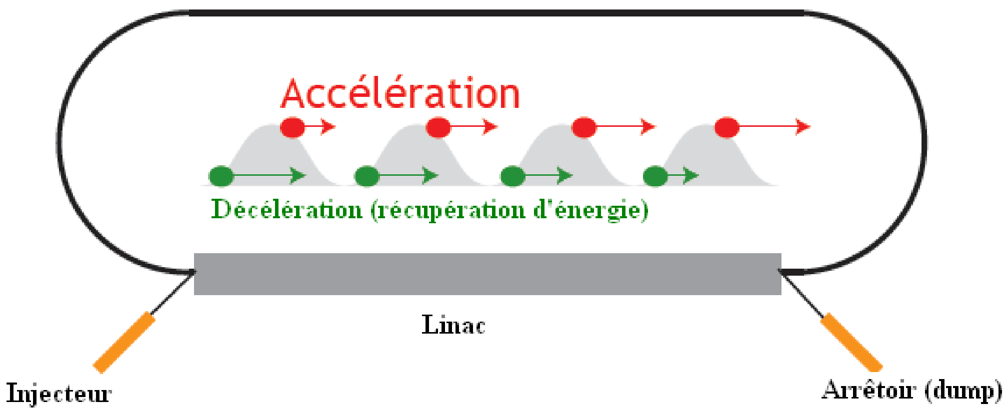


Figure 2.10. Schéma de fonctionnement d'un ERL

1.5.2. Solution ERL de la source de positrons polarisés :

Pour pallier au problème de dégradation du faisceau, et conserver ainsi le flux de gamma produits, l'alternative d'un ERL est proposée. Deux des principaux avantages de la source de rayons gamma basée sur la configuration ERL par rapport à la configuration anneau déjà décrite sont le rendement et les longueurs réduites des paquets (Tableau 2-3.).

paramètre / modèle	ILC/YAG	CLIC	ERL 1	ERL 2	ERL 3
Energie pulse laser (J)	17.76	0.592	6.0	6.0	6.0
rayon pulse Laser (μm)	5	5	10	10	5
Long. Pulse laser (mm)	0.9	0.9	0.24	0.24	0.24
Rendement Max (1/*e*/J)	0.18	0.18	0.568	0.568	2.27
IP $\beta x,z$ (m)	0.5	0.5	0.16	0.16	0.16
Long. Paquet (mm)	0.1	0.6	0.2	0.2	0.2
Émittance hor. Init (nm rad)	1	1	0.625	0.625	0.625
émittance Vert. Init.(nm rad)	0.05	0.05	0.625	0.625	0.625
Population du paquet ($\times 10^{10}$)	6.2	6.2	3.5	0.1	1.0
courant (A)	3.01	15.6	0.03	0.03	0.03
Nombre IPs tour / bunch	100	2546	1	1	1
Facteur de réduction	0.21	0.16	0.27	0.27	0.091
Moy. gammas ($\times 10^9$/bunch/turn)	58	2.8	32.4	0.92	12.4
Moy. gammas/s ($\times 10^{18}$)	12.6	1.66	0.173	0.173	0.232
Long. Train Gamma (ms)	0.0924	0.357	100	100	100
# gammas / train ($\times 10^{15}$)	1.16	0.6	17.3	17.3	23.3
Pertes Synch. , cont. (MW)	1.958	3.330	0.0026	0.0026	0.0026
Pertes Compt., train (MW)	30.31	3.99	0.415	0.415	0.56
Pertes Recov. , cont (MW)	0	0	0.3+	0.3+	0.3+

Tableau 2-3. Performances de la source de rayons gamma. Les lignes en couleur correspondent aux valeurs dont nous aurons besoin pour les calculs dans les paragraphes suivants.

2. Choix de l'optique de focalisation pour l'interaction Compton :

Pour augmenter la luminosité de l’interaction Compton, il faut assurer des faisceaux de dimensions transverses très réduites aux points d’interactions [49]. Dans un premier temps, le calcul de la ligne de focalisation pour un seul point d’interaction sera présenté. Puis, l'effet de l'interaction Compton sur l'enveloppe du faisceau est introduit, par un calcul matriciel simplifié et rapide. Cette simplification permet de s'affranchir de l'utilisation de codes de calcul plus complexes. Ensuite, l'effet sur plusieurs points d'interactions est mis en évidence et une étude comparative avec les résultats obtenus avec Cain est présentée. Enfin, une méthode est proposée afin de conserver les qualités du faisceau au cours des dix points d'interaction.

2.1. Premier point d'interaction :

Pour atteindre les propriétés qui optimisent la luminosité de l’interaction Compton (Tableau 2-3.) au point d’interaction, nous utiliserons un triplet de quadrupôles.

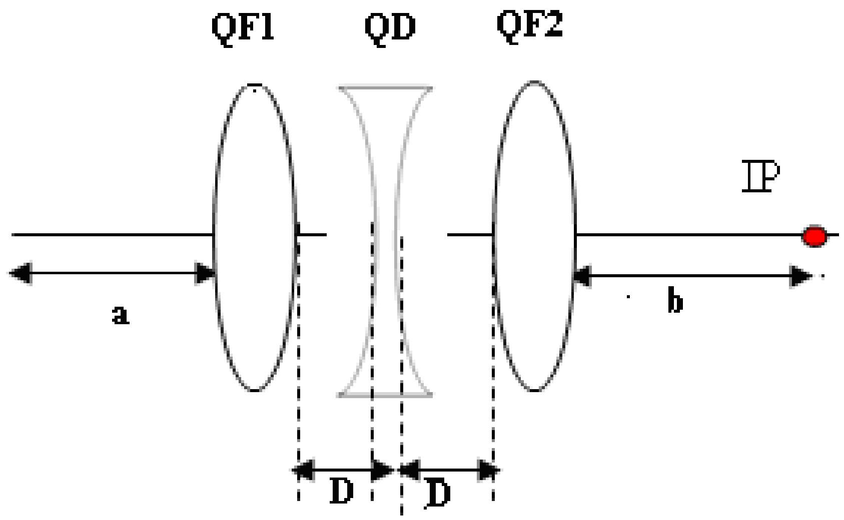


Figure 2.11. Schéma de focalisation au premier point d'interaction.
QF1, QF2 sont le premier et deuxième quadrupole focalisant et QD est le quadrupole défocalisant

Soit un triplet constitué d'un quadrupole défocalisant (QD) de force (K_2) de longueur Lqp2 entouré de deux quadrupôles focalisants QF1 et QF2 de longueur Lqp1 et de forces K_1 et K_3 respectivement. Les trois quadrupoles sont séparés d'une distance D (figure 2.11.). On se propose de calculer les paramètres magnétiques du triplet qui permettent d'avoir une forte focalisation d'un faisceau avec une large fonction bêtatron.

La matrice de transfert de toute la ligne de focalisation est définie comme suit :

$$M = Mb \cdot Mtr \cdot Ma$$
$$Mtr = MQd \cdot MD \cdot MQf$$

Ma : Matrice de transfert de l'espace sans champ de longueur a.
Mb : Matrice de transfert de l'espace sans champ de longueur b.
Mtr : Matrice de transfert du triplet.
MQd, MQf : Matrices de transfert des quadripôles défocalisant et focalisant.

Considérons un faisceau défini par les paramètres de Twiss suivants :

$\beta_0 = 1.5\ m.$

$\alpha_0 = 0$

$$\gamma_0 = \frac{\alpha_0^2 + 1}{\beta_0}$$

On veut calculer la ligne de focalisation qui permet d'avoir un faisceau au point d'interaction dont les paramètres de Twiss (β, α, γ) sont les suivants :

$\beta = 0.16$

$\alpha = 0$

$$\gamma = \frac{\alpha^2 + 1}{\beta}$$

Les paramètres calculés avec un ajustement avec le logiciel *TRANSPORT* sont présentés sur le tableau 2-4.

	K (m^{-2})	LBP(m)
QF1	4.965363	0.2
QD	- 6.135383	0.3
QF2	6.293333	0.2
D	__	0.3
A	__	5.110706
B	___	1.271172

Tableau 2-4. Paramètres des éléments de la ligne de focalisation.

La figure 2.12 représente l'évolution de la fonction bêtatron en fonction de la position. La position s=0 correspond au point d'entrée de la ligne de focalisation, la fonction bétatron est calculée à la sortie de chaque élément de la section de focalisation. La figure 2.13. représente l'ellipse du faisceau après chaque élément de la ligne de focalisation. L'élément traversé est indiqué en haut de chaque figure.
Le faisceau d'entrée est considéré rond dans l'espace de phases, c'est pourquoi les deux ellipses qui représentent le faisceau sur les deux plans sont superposées. Après avoir traversé le triplet de focalisation, le faisceau est focalisé sur les deux plans (x, x') et (y, y') au même plan focale. C'est là tout l'intérêt d'utiliser un triplet au lieu d'un simple quadrupole qui focalise sur un plan et défocalise sur l'autre plan.

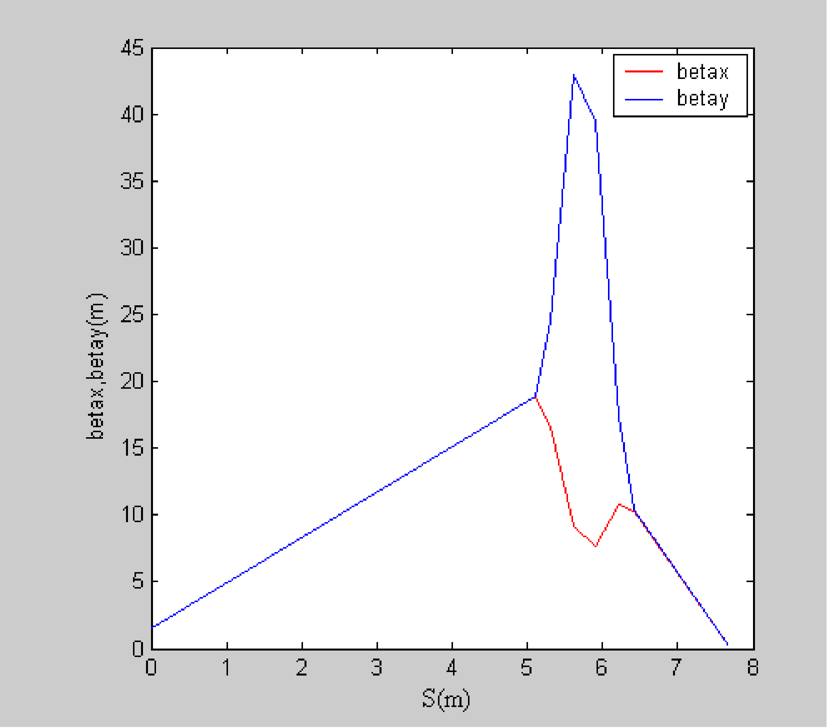


Figure 2.12. Evolution des fonctions bêtatron le long de la ligne de focalisation.

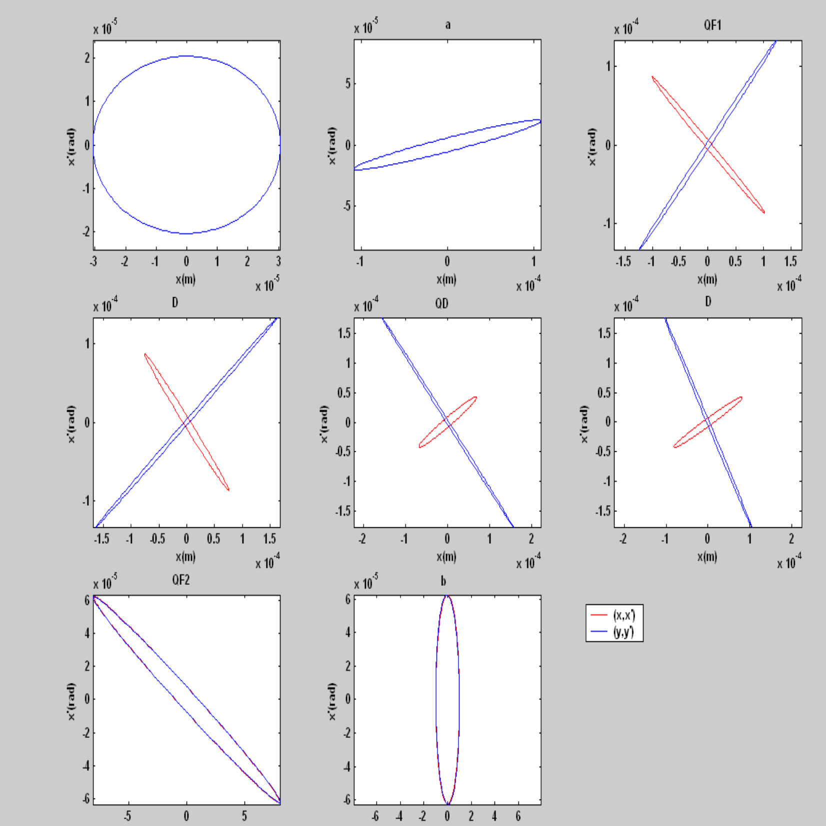


Figure 2.13. Ellipse du faisceau après chaque élément de la ligne de focalisation. En rouge le plan (x, x'). En bleu le plan (y, y').

À partir de ce calcul, nous avons obtenu un faisceau circulaire avec des fonctions bétatrons $\beta_x = \beta_y = 0.16\ m$.

Grâce à ce triplet nous avons pu réaliser une forte focalisation sur les deux plans horizontal et vertical ainsi qu'un faisceau rond. Cette focalisation sur les deux plans est un grand avantage lorsque le faisceau d'électrons interagira avec le faisceau laser car la luminosité est inversement proportionnelle aux deux dimensions transverses du faisceau.
Le calcul précédent nous a permis de valider notre programme de calcul matriciel en comparant les résultats obtenus avec les résultats donnés par le logiciel Transport. Ce même programme va nous servir dans la section suivante pour le calcul des triplets de la ligne de focalisation complète.

2.1.1. Points d'interaction multiples :

Toujours en ne prenant pas en compte l'interaction Compton, nous allons définir un autre triplet qui permet de déterminer dix points de collisions avec les paramètres donnés dans le tableau 2-3.
Il s'agit donc de transporter les mêmes paramètres d'un premier point IP1déjà défini vers un autre point IP2. (figure 2.14)
Les paramètres de Twiss du faisceau au premier point de collision sont donnés par :

$\beta_x = \beta_y = 0.16; \alpha_x = \alpha_y = 0$

De la même façon que dans la section précédente, on définit un triplet de quadrupôles (QF1, QD, QF2) séparés d'une distance D, les distances a et b restent les mêmes.

On effectue ensuite un autre ajustement par le logiciel *Transport* sur les paramètres de ce nouveau triplet de manière à ce que les paramètres de Twiss du faisceau au deuxième point d'interaction c'est-à-dire après la distance b, soient les mêmes qu'au premier point d'interaction. Les résultats obtenus sont portés dans le Tableau 2-5.

	K (m^{-2})	L (m)
QF1	7.6978	0.2
QD	7.5956	0.3
QF2	7.6978	0.2
D	__	0.3
a	__	1.3
B	___	1.3

Tableau 2-5. Paramètres des éléments de la deuxième ligne de focalisation.

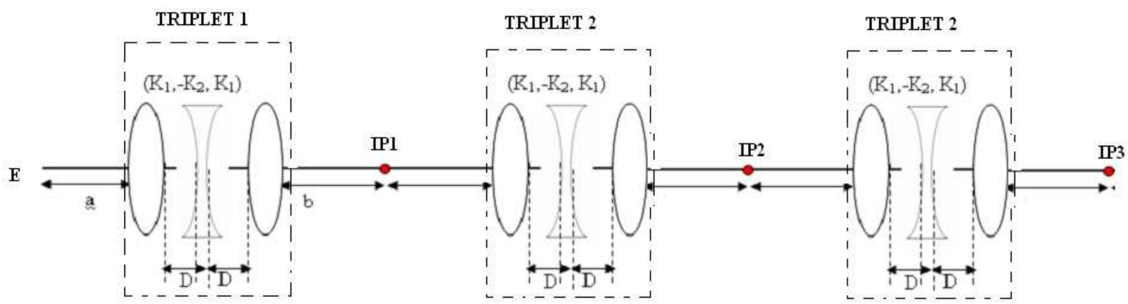


Figure 2.14. Schéma de focalisation avec plusieurs points d'interaction.

Après avoir déterminé les paramètres du triplet, nous les avons introduits dans le programme matriciel pour suivre l'évolution de la fonction bêta du faisceau et de son ellipse dans l'espace des phases entre les deux points de collision.

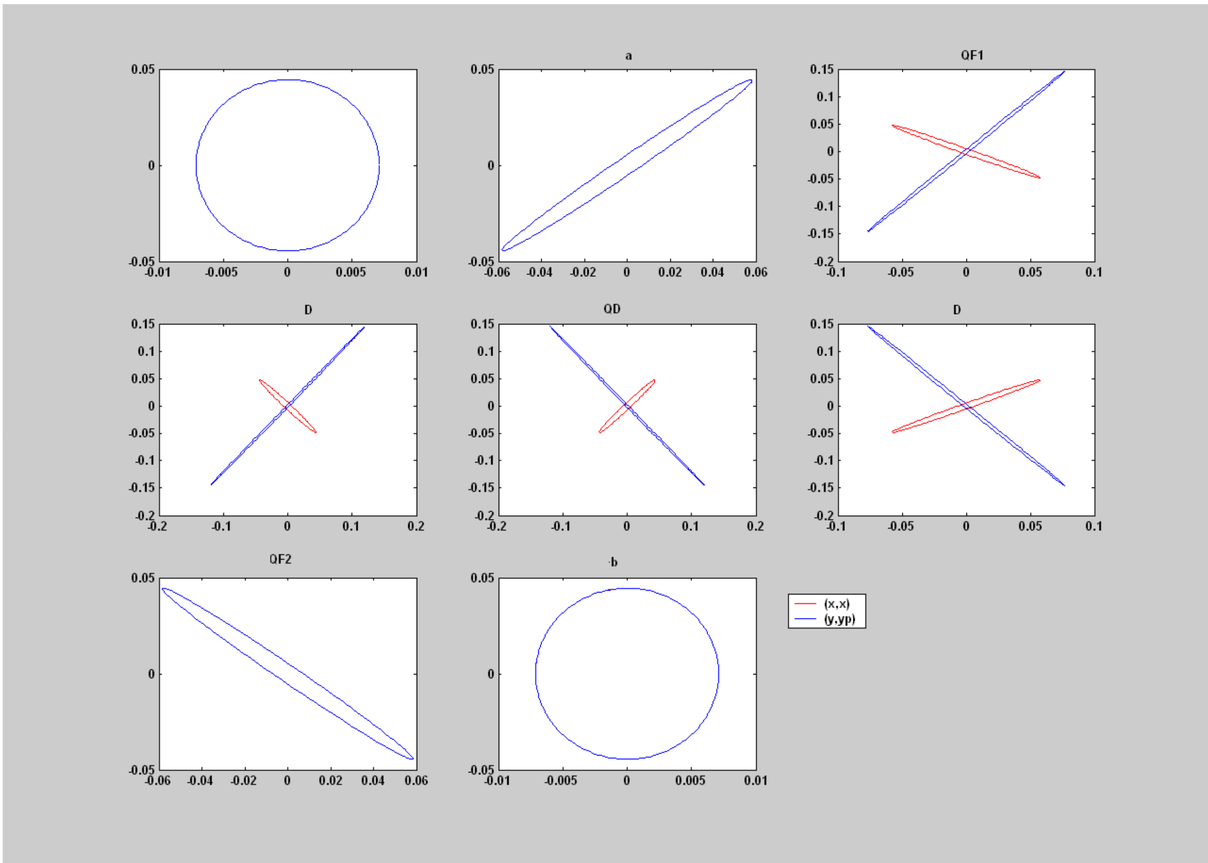


Figure 2.15. Ellipse du faisceau après chaque élément du deuxième triplet. En rouge le plan (x, x'). En bleu le plan (y, y').

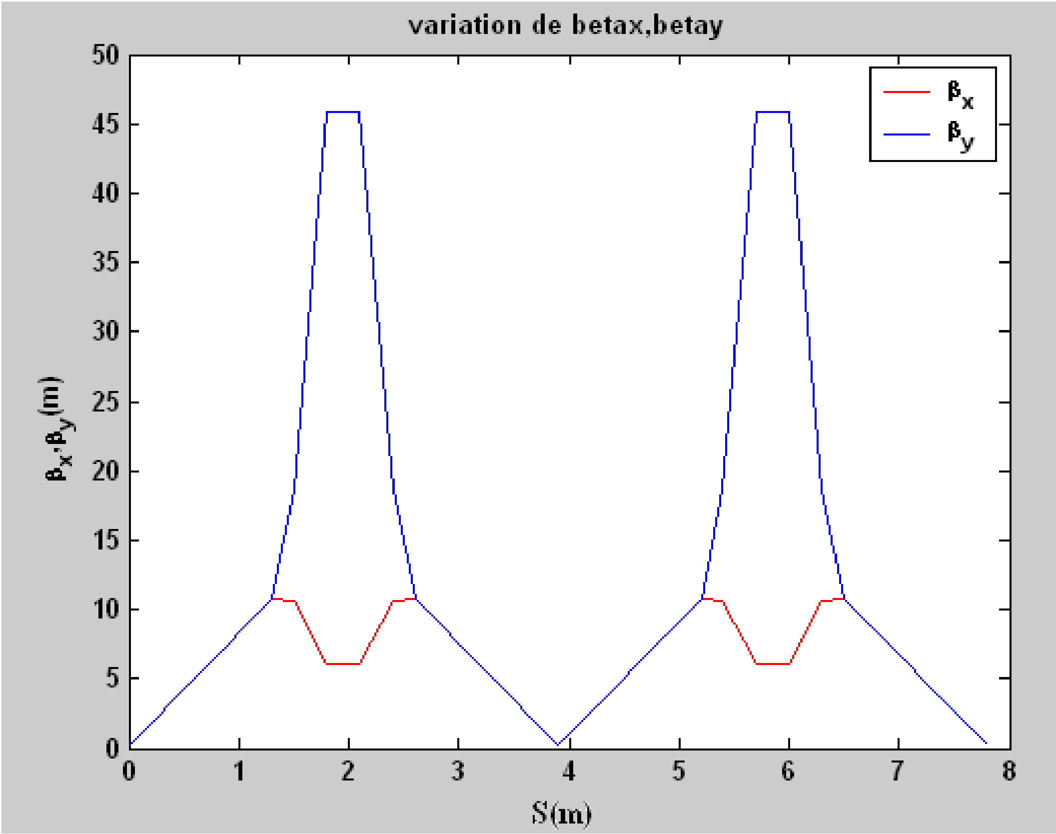


Figure 2.16. Evolution des fonctions bêtatrons le long de la ligne focalisation. En rouge la fonction β_x. En bleu la fonction β_y.

La figure 2.15. représente l'ellipse du faisceau à la sortie de chaque élément à partir du premier point d'interaction jusqu'au deuxième point d'interaction. L'évolution de la fonction bêtatron sur trois points de focalisation est portée sur la figure 2.16.
Pour définir les autres points d'interactions, il suffit de répéter la même section (a, QF1, D, QD, D, QF2, b) à chaque fois.

La figure 2.17 représente l'évolution de la fonction bêtatron sur toute la ligne de transport.

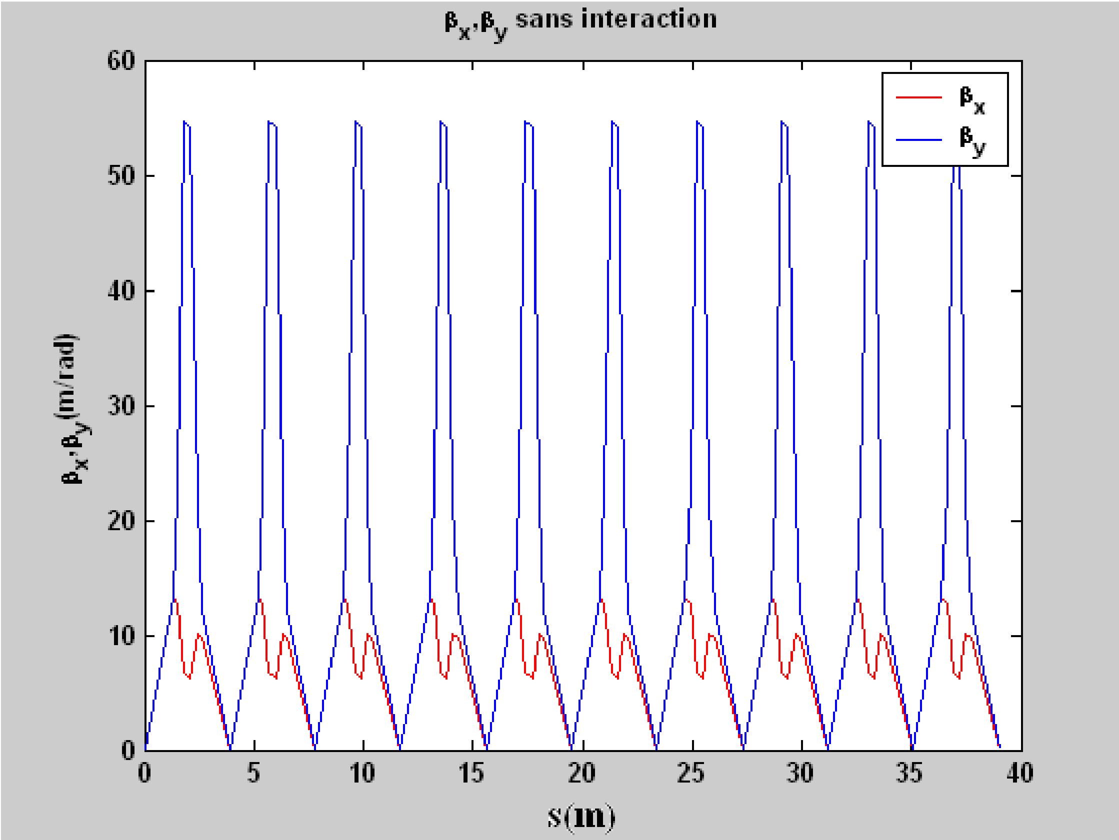


Figure 2.17. Evolution de la fonction bêta à travers la ligne de transport définissant les dix points de collision.

Jusque là nous avons définit la ligne de transport du faisceau qui permet de conserver les caractéristiques optimales du faisceau d'électrons sur dix points de collision. Dans la section suivante, il s'agira d'introduire l'effet Compton et de voir comment l'enveloppe du faisceau va évoluer.

3. Effet de l'interaction Compton :

Dans la section précédente, nous avons calculé une seule section de focalisation. Nous l'avons répétée dix fois pour transporter le faisceau avec les mêmes paramètres. Cependant, sous l'effet de l'interaction Compton, le faisceau d'électrons va voir ces caractéristiques changées. En effet, l'interaction Compton va augmenter la dispersion en énergie et la divergence du faisceau. Comme la force de focalisation des quadrupôles dépend de l'énergie du faisceau, le plan focal du quadrupôle sera différent, lorsque l'énergie du faisceau change après avoir subit une interaction.

Dans ce paragraphe, nous allons estimer l'effet de l'interaction Compton sur le transport du faisceau. Nous avons dévéloppé un calcul matriciel qui permet de transporter l'enveloppe du faisceau à travers la ligne de focalisation prenant en compton les interactions Compton en chaque point d'interaction.Dans un premier temps, nous introduirons le modèle et les résultats obtenus. Dans un deuxième temps, nous allons présenter les résultats de la simulation faite avec le logiciel de *'Tracking'*, CAIN, qui calcule le transport du faisceau particule par particule puis on finira par proposer une solution qui permet de limiter l'effet de l'interaction Compton sur l'enveloppe du faisceau.

3.1. Transport d'enveloppe :

Dans ce calcul, nous avons procédé par étape. Nous avons d'abord supposé que l'interaction Compton induit uniquement une variation de l'énergie moyenne du faisceau. Puis nous avons rajouté l'effet de la dispersion sur la divergence du faisceau.

3.1.1. Première approximation

En première approximation, nous considérons que l'interaction Compton induit uniquement une variation de l'énergie du faisceau d'électrons.
Soit : σ la matrice du faisceau au point d'interaction, elle est donnée en fonction des paramètres de Twiss :

$$\sigma = \varepsilon \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & \gamma \end{pmatrix} \tag{II.3.1}$$

Où $\varepsilon = \frac{\varepsilon_n}{\gamma_r}$ et $\gamma_r = \frac{E}{E_0}$

Avec ε l'émittance géométrique du faisceau, ε_n l'émittance normalisée et γ_r le facteur de Lorentz.
La matrice du faisceau avant l'interaction peut alors s'écrire sous la forme :

$$\sigma = \frac{\varepsilon_n}{\gamma_r^i} \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \tag{II.3.2}$$

Où $\gamma_r^i = \frac{E_i}{E_0}$ est le facteur de Lorentz avant l'interaction et E_i l'énergie du faisceau avant l'interaction.
Si on considère que l'interaction induit uniquement une variation de l'énergie moyenne d'une valeur ΔE , l'énergie finale (après interaction) du faisceau est donnée par :

$$E_f = E_i - |\Delta E| \tag{II.3.3}$$

Nous savons que l'émittance normalisée ε_n reste un invariant du mouvement lorsque l'énergie du faisceau change. Donc elle est conservée après l'interaction tandis que l'émittance géométrique ε varie. La matrice du faisceau, juste après l'interaction Compton σ_s , dans ce cas est donnée par :

$$\sigma_s = \frac{\varepsilon_n}{\gamma_r^f} \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & \gamma \end{pmatrix} \tag{II.3.4}$$

Avec $\gamma_r^f = \frac{E_f}{E_0}$ le facteur de Lorentz après interaction.

$$\sigma_s = \frac{\varepsilon_n}{\gamma_r^f} \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & \gamma \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon_n}{\dfrac{E_i - \Delta E}{E_0}} \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{s11} & \sigma_{s12} \\ \sigma_{s21} & \sigma_{s22} \end{pmatrix} \tag{II.3.5}$$

Les paramètres α, β et γ sont définis au départ, ce sont les paramètres au point d'interaction.
Note : Pour ne pas la confondre avec le paramètre de Twiss, nous avons noté l'énergie réduite du faisceau par γ_r.

Pour les calculs numériques, nous avons considéré les valeurs suivantes :
$E_i = 1{,}3GeV, E_0 = 511\times10^{-6}GeV, \varepsilon_n = 6{,}25\times10^{-10}\,m\cdot rad, \Delta E = 14.6\times10^{-3}\,GeV.$
Les paramètres de Twiss au point d'interaction sont:
β=0.16 m
$\alpha = 0$
$$\gamma = \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\beta}$$
$$\gamma_r^i = \frac{E_i}{E_0}, \varepsilon_i = \frac{\varepsilon_n}{\gamma_r^i}$$
Après l'interaction nous avons :
$$\gamma_r^f = \frac{E_i - \Delta E}{E_0}, \varepsilon_f = \frac{\varepsilon_n}{\gamma_r^f} \qquad \text{(II.3.6)}$$
L'énergie perdue ΔE par interaction Compton est calculée par les équations définies dans le paragraphe 1 du chapitre 1. Dans notre cas, c'est-à-dire un faisceau de 1,3 *GeV*, on obtient une valeur moyenne $\Delta E = 14{,}6\ 10^{-3}\,GeV$ avec une dispersion de 9*MeV*. Ce qui correspond à une perte de 2% de l'énergie.

Après avoir calculé la matrice sigma après interaction, on suit la propagation du faisceau à travers toute la ligne de focalisation.
Dans le cas où il n'y a pas d'interaction, l'équation de propagation peut être écrite sous la forme :
$$\sigma_{i+1} = M \cdot \sigma_{i+1} \cdot M^t \text{ avec } i = 1..10. \qquad \text{(II.3.7)}$$
L'indice *i* correspond aux points d'interactions
Tandis que lorsqu'il y a une interaction on introduit deux matrices:

- $\sigma_{c,a}$ la matrice du faisceau aux points d'interactions avant la collision
- σ_c la matrice du faisceau après la collision.

On peut alors écrire :
$$\begin{cases} \sigma_{c,a,i+1} = M \cdot \sigma_{c,a,i} \cdot M^t \\ \sigma_{c,i} = \dfrac{\gamma_{r,i}}{\gamma_{r,i+1}} \sigma_{c,a,i} \end{cases} \text{ avec } \gamma_{r,i} = \frac{E_i}{E_0} \text{ , } \gamma_{r,i+1=} \frac{E_i - \Delta E}{E_0} \text{ et } i = 1..10 \qquad \text{(II.3.8)}$$

Rappelons que $M = Mb \cdot Mtr \cdot Ma$ avec $Mtr = MQd \cdot MD \cdot MQf$. et M^t est la matrice transposée de la matrice *M*.
La figure 2.18. représente l'ellipse du faisceau en sortie du deuxième triplet, on observe que la variation de l'énergie moyenne du faisceau causée par l'interaction Compton au premier point de focalisation, induit une légère augmentation de l'émittance transverse du faisceau.

La figure 2.19 représente l'effet de la variation de l'énergie moyenne sur les fonctions bêtatron au bout de dix points d'interactions. On peut y voir que l'augmentation de la fonction

bétatron commence à devenir significative, la valeur maximale de la fonction bétatron sur l'axe *y* passe d'environ 50 *m* à 256 *m* au bout de dix interactions. Cela est prévisible car la différence d'énergie devient de plus en plus importante, et les distances focales des quadrupôles augmentent en conséquence.
Il faut noter que, dans le but de comparer ces résultats avec les résultats de CAIN, nous avons représenté l'évolution des racines carrées des fonctions bêtatrons le long de la section de focalisation au lieu des fonctions bêtatrons.
.

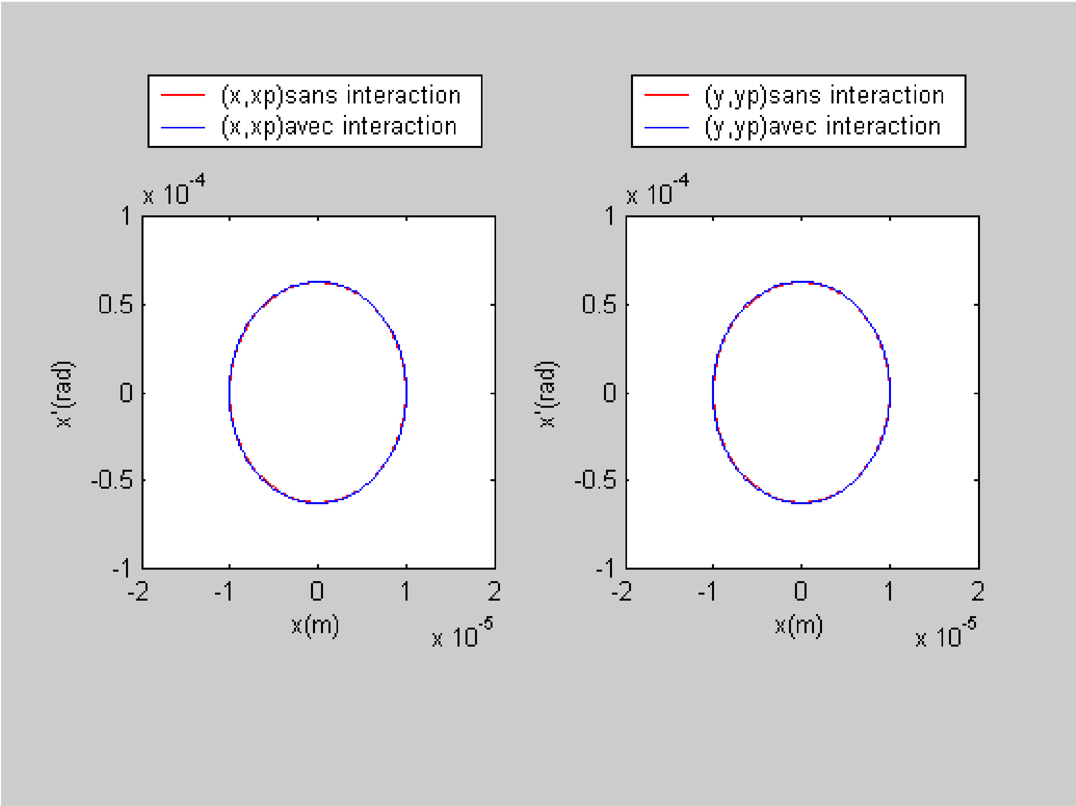


Figure 2.18. Effet de l'interaction Compton sur l'ellipse du faisceau.

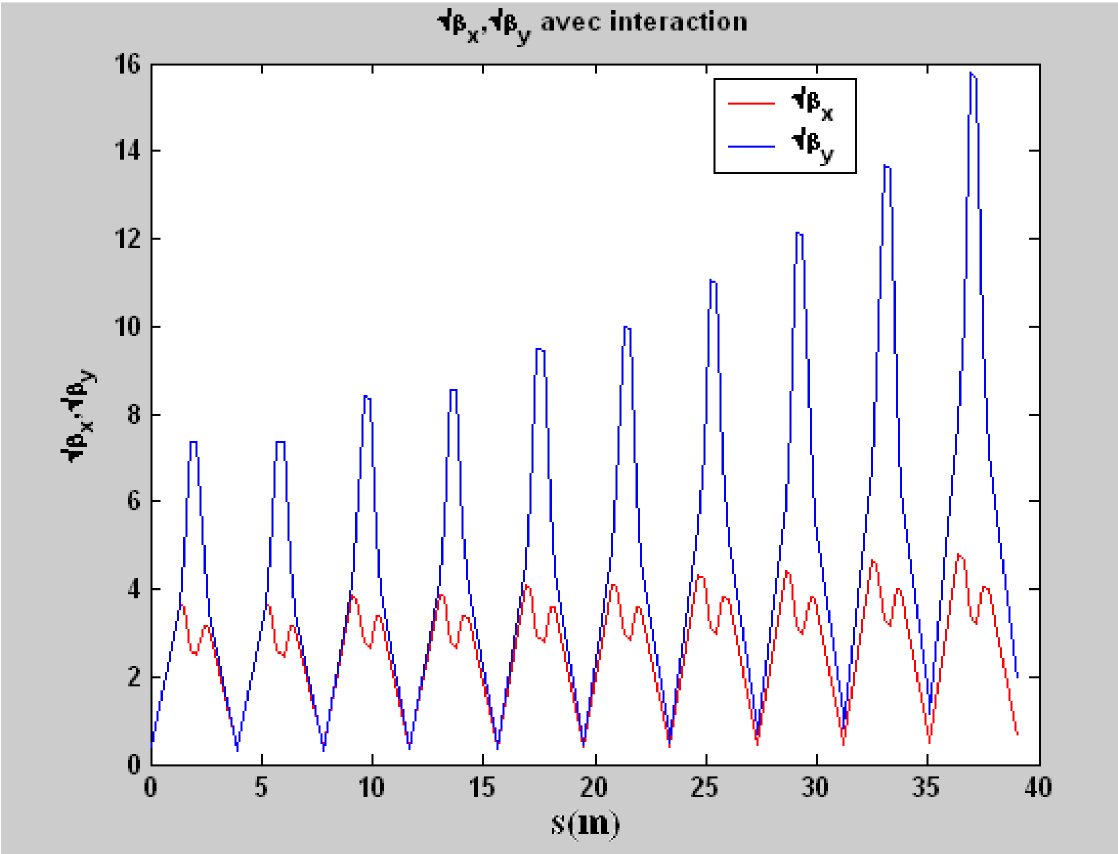


Figure 2.19 Evolution des fonctions bêtatrons en considérant uniquement une variation de l'énergie moyenne du faisceau.

3.1.2. Deuxième approximation

Jusque là nous n'avons considéré que la variation de l'énergie moyenne du faisceau, or la distribution de l'énergie a une dispersion qu'il faut prendre en compte. En plus du fait que l'interaction Compton agit sur l'énergie moyenne du faisceau, elle modifie aussi sa distribution. Dans cette partie, nous allons considérer les deux effets sur l'enveloppe du faisceau sur dix points de collisions. Dans un premier temps, nous regarderons le résultat obtenu avec un code écrit sous Matlab dont on expliquera la structure. Dans un second temps on comparera avec le résultat obtenu avec CAIN [18].

Pour commencer on considère le faisceau au premier point de collision définit précédemment dont les paramètres sont :

$$\beta_x=\beta_x=0.16$$

$$\alpha_x=\alpha_y=0$$

$$\gamma_x=\gamma_y=\frac{\sqrt{1+\alpha_x^{\ 2}}}{\beta_x}$$

Soit V_0 le vecteur décrivant les dimensions du faisceau définit par :

$$V_0 = \begin{pmatrix} x = \sqrt{\beta_x \varepsilon} \\ x^{'} = \sqrt{\varepsilon \gamma_x} \\ y = \sqrt{\beta_y \varepsilon} \\ y^{'} = \sqrt{\varepsilon \gamma_y} \\ l \\ \delta \end{pmatrix} \qquad \text{(II.3.9)}$$

Lorsque le faisceau est transporté d'un premier point (E) au point *IP₁* à travers la ligne définit dans la figure 2.11, le vecteur V_1 au point IP_1 est relié à V_0 par :

$$V_1 = MV_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ l \\ \delta \end{pmatrix}_{IP1} = M \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ l \\ \delta \end{pmatrix}_{E} \qquad \text{(II.3.10)}$$

Avec *M* est la matrice de la section de focalisation définie précédemment.
Si on ne considère pas l'interaction Compton, nous aurons :

$$V_i = MV_{i-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ l \\ \delta \end{pmatrix}_{IPi} = M \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ l \\ \delta \end{pmatrix}_{IPi-1} \qquad \text{(II.3.11)}$$

Avec i=1...10.
Une fois le vecteur V_i calculé, on déduit les paramètres de Twiss avec les relations suivantes :

$$\begin{cases} \beta_x = \dfrac{x^2}{\varepsilon} \\ \gamma_x = \dfrac{x^{'2}}{\varepsilon} \\ \alpha_x = \sqrt{\beta_x \gamma_x - 1} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \beta_y = \dfrac{y^2}{\varepsilon} \\ \gamma_y = \dfrac{y^{'2}}{\varepsilon} \\ \alpha_y = \sqrt{\beta_y \gamma_y - 1} \end{cases} \qquad \text{(II.3.12)}$$

Les résultats obtenus sont représentés sur la figure 2.20.

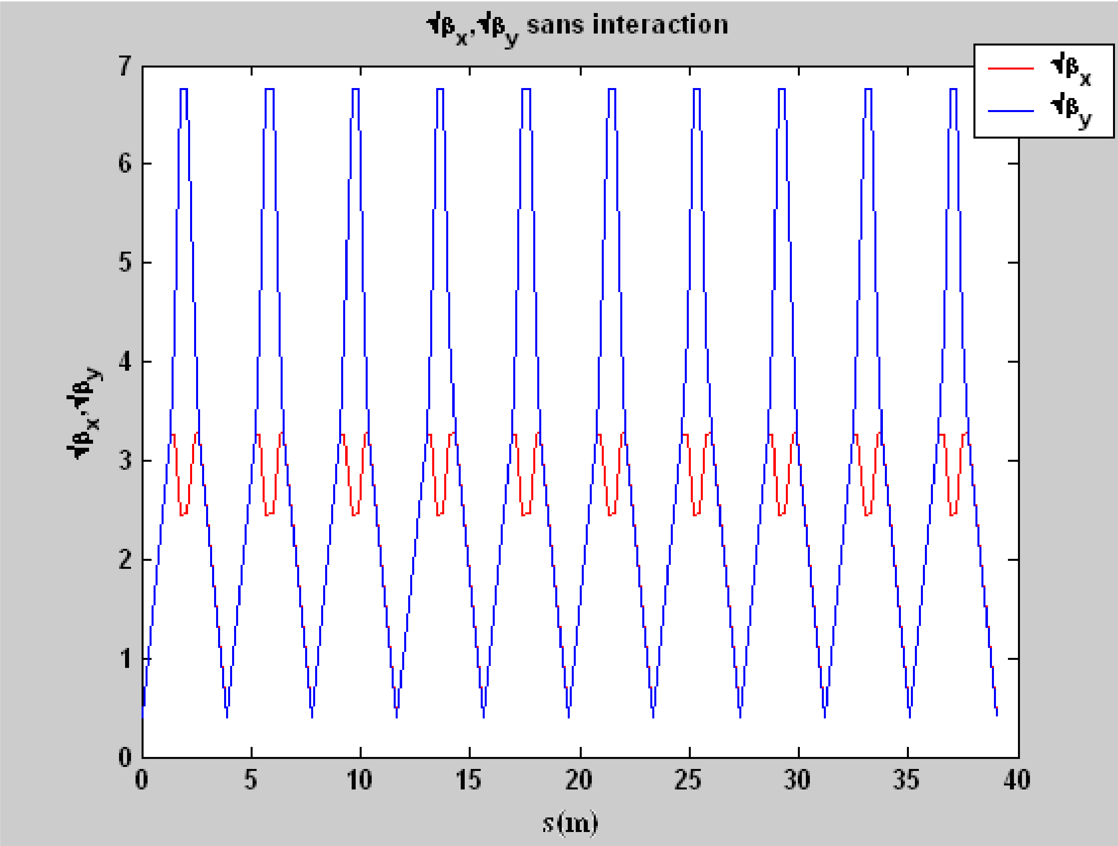


Figure 2.20. Evolution des fonctions bêtatrons sur dix points de collision sans interaction Compton.

A présent considérons le cas où une interaction Compton se produit en chaque point IP tel que c'est présenté dans la figure 2.21.

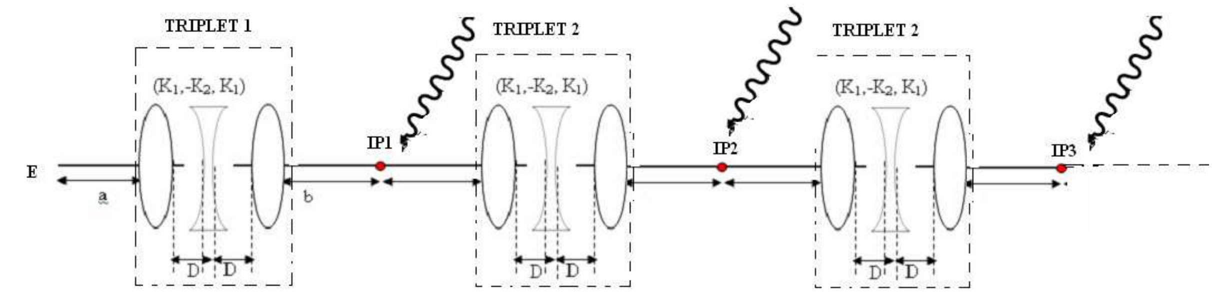


Figure 2.21. Schéma des dix points de collisions en présence du laser.

Le transport du vecteur V_0, dans ce cas, va être influencé par l'interaction Compton. En effet, l'interaction Compton fait perdre de l'énergie au faisceau d'électrons mais aussi elle augmente sa dispersion en énergie δ à laquelle vient s'ajouter la dispersion due à l'interaction avec le laser, notons cette dispersion par δ_c. Cette augmentation va agir sur le faisceau comme dans le cas de l'amortissement adiabatique et fera augmenter la divergence du faisceau.
On a alors :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \\ y_1 \\ y_1' \\ l_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} + laser \rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \\ y_2 \\ y_2' \\ l_2 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \quad avec \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_2' = x'_1(1+\delta c) \\ y_2 = y_1 \\ y_2' = y'_1(1+\delta c) \\ l_2 = l_1 \\ \delta_2 = \delta_1 + \delta c \end{cases} \tag{II.3.13}$$

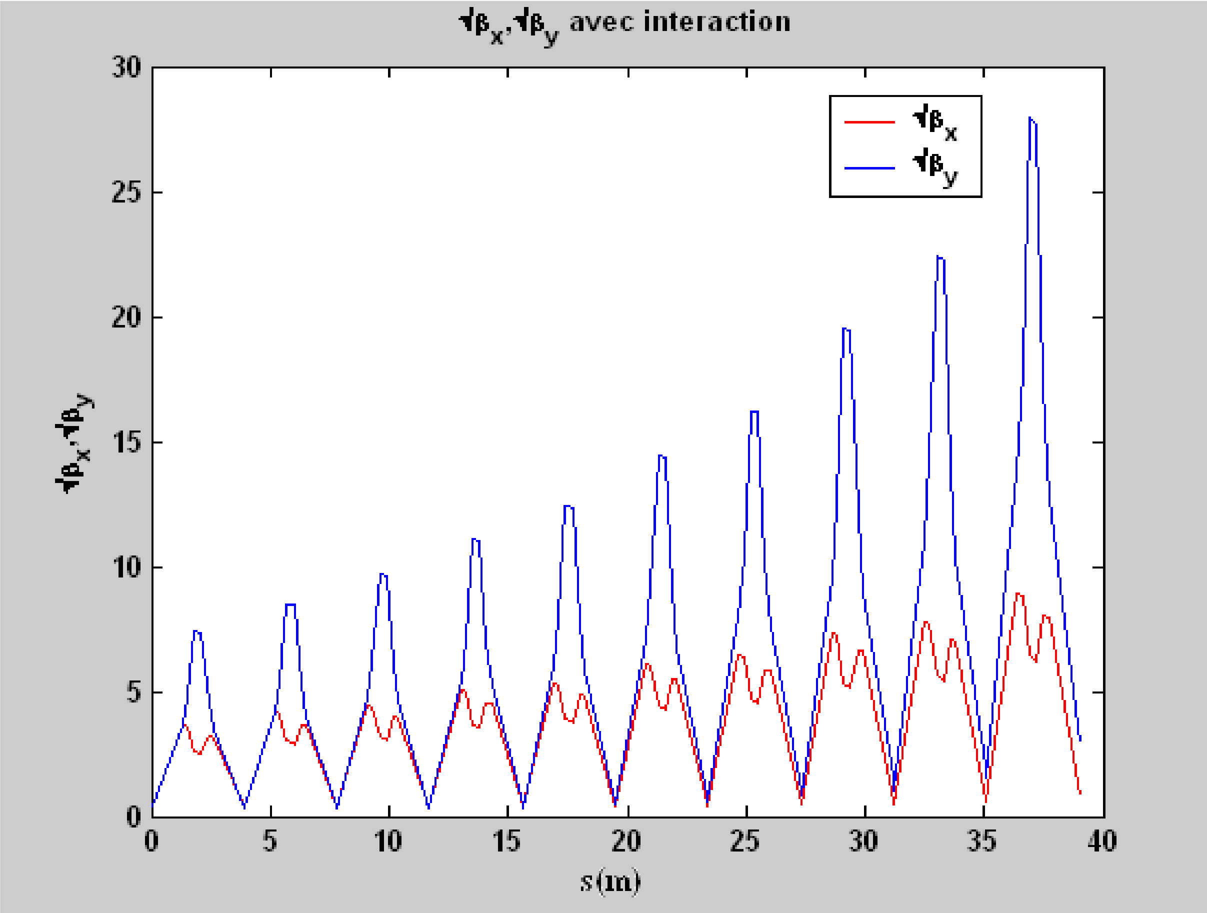


Figure 2.22 Evolution de la fonction β sur dix points de collisions en présence d'interaction Compton.

La dispersion en énergie introduite par l'interaction Compton sur le faisceau est donnée par

$$\delta_c \approx \sqrt{\frac{2}{3}\gamma\frac{E_{laser}}{E}} \tag{II.3.14}$$

Au premier point d'interaction $\delta_c \approx 1.2\%$.

La figure 2.22. représente l'évolution des fonctions bêtatrons sur toute la ligne de focalisation en tenant compte de la variation de l'énergie moyenne du faisceau ainsi que de sa dispersion. De cette figure, on peut constater l'effet de l'interaction Compton sur l'enveloppe du faisceau. Au bout de dix collisions la valeur maximale de la fonction bêtatron à augmenté d'environ un facteur 2. Si l'on compare cette figure à la figure 2.19., on note que l'effet de la dispersion induite par l'interaction Compton, vient s'ajouter à l'effet de la variation de l'énergie moyenne.
Si on compare la valeur de la fonction bétatrons maximale sur le dernier triplet, on voit que qu'elle est 4 fois supérieure lorsqu'on prend en compte la dispersion en énergie.

3.2. Transport des particules

Pour vérifier les résultats précédents, nous avons fait un calcul avec CAIN en considérant les même paramétres. Les valeurs d'entrées de ce logiciel sont résumées dans Tableau 2-6

Faisceau d'électron	
Energie	1,3 GeV
Ne/paquet	$1x10^{10}$
Bêta horizontal	0,16 m
Bêta vertical	0,16 m
Emittance horizontale	$6{,}25x10^{-10}$
Emittance verticale	$6{,}25x10^{-10}$
Sigma horizontal au premier CP	10 µm
sigma vertical au premier CP	10 µm
sigma longitudinal	0,2 mm
Faisceau laser (en chaque IP)	
sigma transverse	5µm
Sigma longitudinal	0,24 mm
Angle de croisement laser/faisceau d'e^-	0,087 rad.

Tableau 2-6. Paramètres de la simulation de l'interaction Compton avec CAIN.

Dans le souci de vérifier la justesse du calcul effectué, nous avons tracé l'évolution de la fonction bêtatron entre deux points de collisions en l'absence d'interaction Compton par CAIN avec les mêmes paramètres de la ligne de transport. Le résultat est montré sur figure 2.23. En comparant ce graphique à celui de la figure 2.16. on constate que les deux calculs donnent le même résultat.

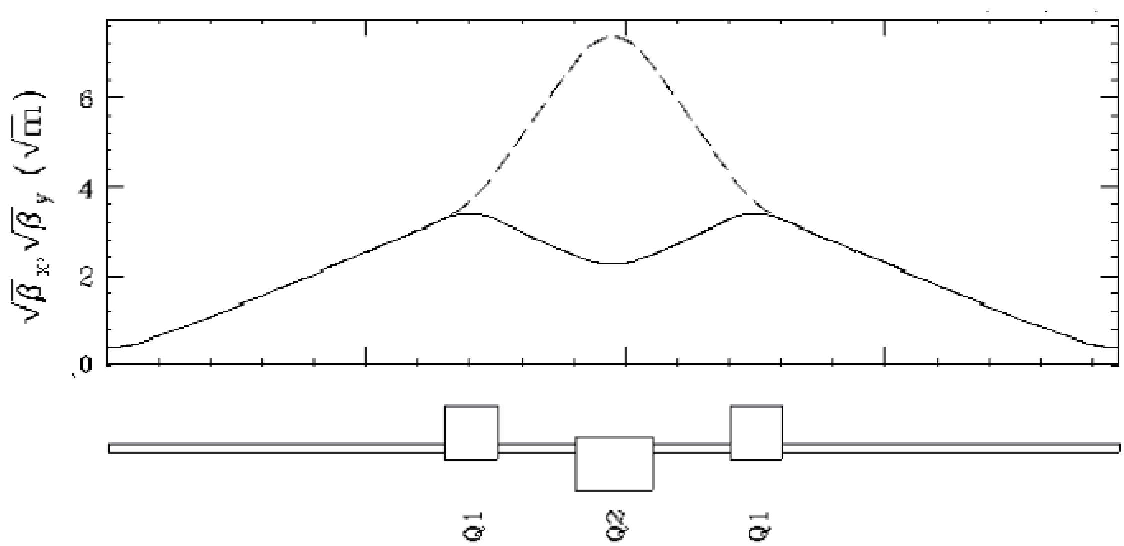


Figure 2.23. Fonctions Bêtatron entre deux points de collisions calculées avec CAIN. En trait plein $\sqrt{\beta_x}$. en trait discontinu $\sqrt{\beta_y}$.

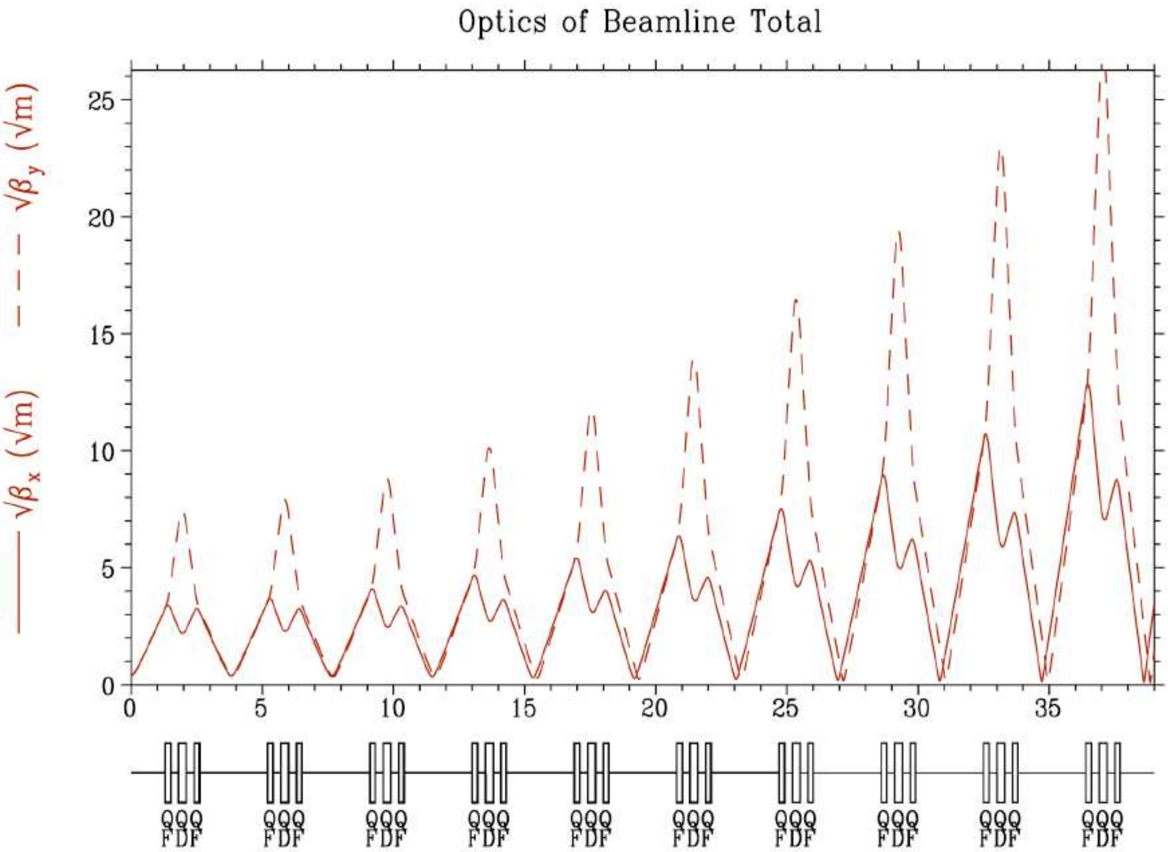


Figure 2.24. Fonctions bêtatrons sur dix points de collisions.

La figure 2.24. représente l'évolution des fonctions bêtatrons en présence d'une interaction Compton en chaque point d'interaction. Au bout de dix collisions le maximum de la fonction beta augmente considérablement. La comparaison de la figure 2.24. et la figure 2.22. montre que le modèle simple réalisé avec un programme, simple d'utilisation et rapide, basé sur le formalisme matriciel de transport d'enveloppe, traduit suffisamment bien l'effet de l'interaction Compton sur le transport de l'enveloppe du faisceau d'électrons.

3.3. Correction du défaut de focalisation

D'après les résultats du paragraphe précédent, l'effet de l'interaction se traduit par une augmentation de l'émittance transverse du faisceau. En effet, après chaque interaction, l'énergie du faisceau diminue. La force de focalisation des quadrupôle dépendant de l'énergie (cf. équation(I.2.34) chapitre 1), la distance focale du quadrupoles n'est plus la même. Le faisceau diverge donc avant d'arriver sur le triplet suivant, les dimensions seront plus grandes avec une énergie plus faible, ensuite ce même triplet ne focalisant pas assez le faisceau, les dimensions de ce dernier continuent à augmenter sous l'effet de l'interaction et ainsi de suite.

Pour pallier ce défaut de focalisation, on pourrait donc penser à adapter le gradient des quadrupôles de chaque triplet de façon à ce que le faisceau soit focalisé au même point focal avec les mêmes dimensions transverses ou bien adapter les distances entre les quadrupôles du triplet après chaque point de collision. Nous avons essayé de faire des ajustements avec transport qui n'ont pas donnés un bon résultat.

La solution proposée par T. OMORI est de limiter le nombre de collisions à cinq pour éviter les problèmes qui peuvent être causés par la divergence du faisceau.

Chapitre 3. Projet RADIOTHOMX

Dans les domaines d'applications des rayons X [56], il y a besoin d'avoir des faisceaux de haute brillance, ce fait est le principal moteur de tous les développements technologiques. Les synchrotrons sont de nos jours les meilleurs candidats pour de telles applications. Mais leur coût élevé et leur encombrement ont encouragés le développement à travers le monde de machines plus compactes [55]. Durant les dernières années, les sources de lumière à rétrodiffusion Compton ont attiré un intérêt grandissant pour la production de faisceau de rayons X de haute brillance. Avec l'avènement des techniques d'amplification des lasers et des faisceaux d'électrons de très faibles émittances et de grands courants moyens, la possibilité de développer ces sources avec suffisamment de luminosité pour les applications exigeantes [6] [8] [9]généralement réservées aux grands synchrotrons de 3ème génération est en train de devenir une réalité. Ce projet se situe dans cette optique. C'est l'association des progrès réalisés dans le développement de résonateur Fabry Pérot de haut gain en mode pulsé et des technologies d'accélérateurs afin de développer une machine compacte capable de produire des flux intenses de rayons X monochromatiques.

La réalisation de ce genre de machines nécessite une bonne maitrise à la fois du faisceau laser et du faisceau d'électrons. La qualité du faisceau laser est définie par le résonateur optique utilisé. Le faisceau d'électrons quant à lui dépend du design de la machine. Pour contrôler le flux produit, il faut un design bien étudié de façon à garder un faisceau performant.

Dans ce chapitre, nous commencerons par présenter d'une manière générale le projet qui est sous étude au laboratoire et on fixera les objectifs à atteindre en termes de flux et de taux de répétition et les paramètres qui les limitent. Ensuite, nous présenterons les différentes études faites dans le but d'optimiser les paramètres de la machine. Nous décrirons en même temps le programme de simulation utilisé et on finira par une présentation de l'étude de conception proposée et les difficultés liées à sa réalisation.

1. Description du projet

Le principe de la machine est basé sur la diffusion Compton des impulsions lasers infrarouge de basse énergie (10 à 30 *mJ*) sur des paquets d'électrons relativistes de 50 *MeV*. Les faisceaux lasers intenses peuvent être obtenus avec des cavités Fabry Pérot (voir la deuxième partie de ce document) couplées soit avec un laser conventionnel (laser solide) ou un laser à fibre optique qui permet de réaliser des brillances très élevées [57]. L'énergie des photons rétrodiffusés, déterminée par l'énergie du faisceau d'électrons et celle du faisceau laser, sera de l'ordre de quelques dizaine de *keV*. Comme l'angle de diffusion des photons et leur énergie sont corrélés, les photons produits peuvent être collimatés pour atteindre une largeur de bande spectrale de 5 à 10%.

Pour maximiser le flux, il est important d'avoir un recouvrement parfait entre le faisceau d'électrons et le faisceau laser, c'est ce qui impose la taille du faisceau d'électrons au point d'interaction. Cependant, l'interaction Compton détériore la qualité du faisceau d'électrons. La première étude de conception envisagée est un anneau de stockage (figure 3.1) fonctionnant à une fréquence d'injection assez élevée. Pour préserver les caractéristiques du faisceau d'électron, l'anneau stocke le faisceau pendant un temps suffisamment court pour minimiser l'effet de la dégradation du faisceau induite par les interactions Compton. L'autre alternative est un accélérateur linéaire à récupération d'énergie (ERL) (figure 3.2) fonctionnant avec un courant moyen élevé dans lequel le faisceau est renouvelé après chaque interaction. Les deux configurations ont pour objectif d'atteindre un flux supérieur à 10^{12} photons/s.

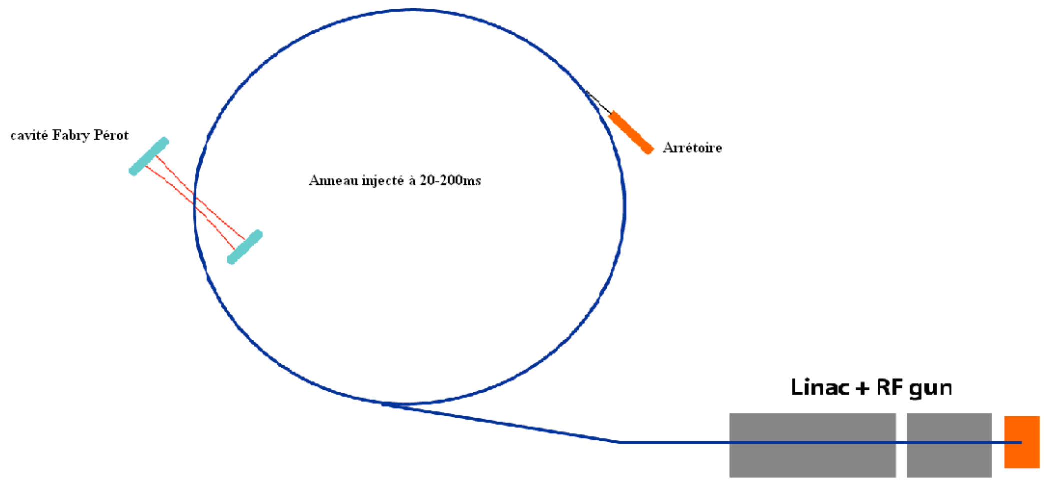


Figure 3.1 Schéma du principe de l'anneau RADIOTHOMX.

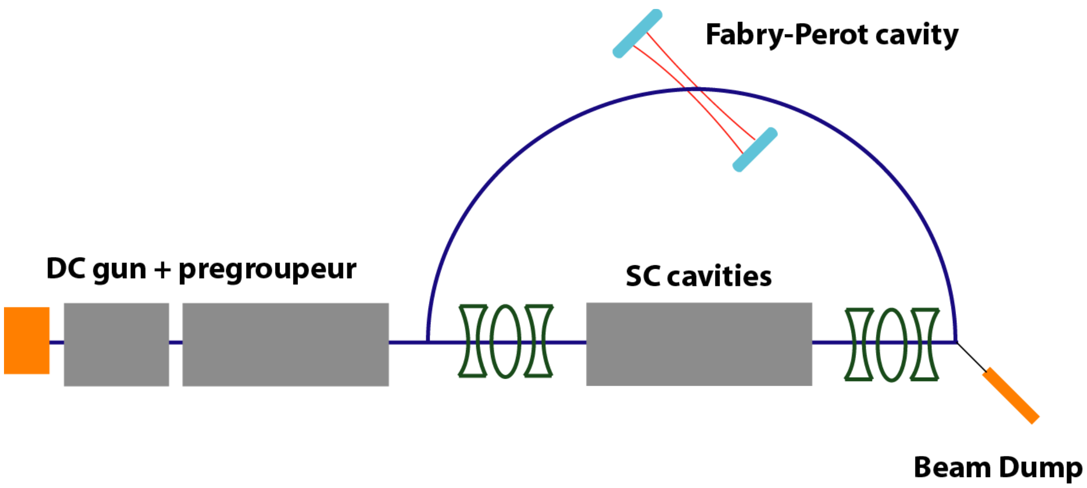


Figure 3.2 Schéma de principe d'un ERL du projet RADIOTHOMX.

2. Choix des paramètres de l'anneau

Le but principal de la machine étudiée est de produire des flux intenses de rayons X monochromatiques. Pour comprendre la problématique de la production de rayon X par interaction Compton dans l'anneau, l'étude de la dynamique longitudinale pour l'anneau Compton s'impose. En effet, le flux de rayons X produits dans l'anneau dépend de la qualité des faisceaux qui rentrent en collision. L'étude que nous présentons dans cette section a pour objectif d'appréhender l'effet des paramètres de fonctionnement de l'anneau sur le flux produit. Pour les applications médicales, connaître le flux de rayons X produits est important, pour définir le temps d'exposition du patient.

Le modèle que nous avons utilisé est bien adapté à l'étude que nous voulons faire. Il permet de calculer le taux de photons produits ainsi que la longueur du paquet et la dispersion en énergie, tour après tour dans l'anneau.

2.1. Présentation du code de simulation :

Pour étudier le flux de photons produit par l'interaction Compton et les propriétés du paquet après chaque tour de l'anneau, un programme de simulation de la dynamique longitudinale du faisceau d'électrons dans l'anneau en présence d'interactions Compton, développé par E. Bressi de l'INFN, est utilisé [76] [77] [78].
Ce programme reproduit la dynamique longitudinale des particules d'un paquet d'électrons sur plusieurs tours dans l'anneau Compton dans le domaine temporel. Il est basé sur les équations de Sands (cf. équation(II.4.15)). Cependant, le nombre de particules dans un paquet étant très élevé, au lieu de suivre toutes les particules dans l'anneau, un nombre limité de macro particules (N_{macro}<< Ne) est pris en compte.

Dans ce programme, la distribution initiale des électrons est supposée gaussienne, la distribution longitudinale des phases Φ est maillée. Pour chaque maille, le nombre d'interactions avec le laser, égal au nombre de photons produits, est calculé en tenant compte de la probabilité d'interaction, avec l'équation :

$$N = \sigma . L \tag{III.2.1}$$

Où σ est la section efficace de l'interaction Compton.
Le calcul détaillé de la luminosité de l'interaction L peut être trouvé dans [78], après intégration sur la zone d'interaction et le temps on obtient l'équation(I.1.17).

Pour chaque interaction, un nombre MonteCarlo est généré pour l'énergie des photons diffusés. Ensuite, l'énergie perdue par chaque maille est calculée. La perte d'énergie totale est obtenue par une interpolation linéaire.

2.2. Résultats des simulations :

Les paramètres d'entrée du code sont présentés sur le Tableau 3-1. :

Paramètre	Symbole (unité)	Valeurs
Facteur de compression des moments	α_1	1,136 10^{-2}
tension RF	$V_{RF}(MV)$	0,3
fréquence RF	$f_{RF}(MHz)$	553,671
Nombre d'harmonique	H	18
Intégrales synchrotrons	I2	35,6999
	I3	202,840
	I4	3,5752
Longueur de l'anneau	$L_0(m)$	9,745840
Nombre de tours	Turnmax	10^5
Energie du faisceau d'électrons	$E_0(MeV)$	50
Dimensions transverses du paquet d'électrons	$\sigma_{xe}(m)$	50 10^{-6}
	$\sigma_{xe}(m)$	50 10^{-6}
Dimensions transverses du faisceau laser	$\sigma_{xL}(m)$	50 10^{-6}
	$\sigma_{yL}(m)$	50 10^{-6}
Longueur du pulse laser	$\sigma_{sL}(ps)$	1
Energie d'un photon du laser	Egamma(MeV)	1,24 10^{-6}
Nombre de photons dans un pulse.	Ngamma	1,51 10^{17}
Nombre d'électrons dans un paquet	Ne	6,24 10^9
Angle de croisement	α_c (rad)	2°
Dispersion en énergie	σ_E (ps)	6 10^{-3}
Longueur du paquet d'électrons	σ_{se} (ps)	4,8
Nombre d'électrons par paquet	Ne	6,24 10^9 (charge 1nC)
Nombre de photons par impulsion laser	Ng	1,51 10^{17} (énergie 30 mJ avec λ=1030 nm)

Tableau 3-1. Paramètres d'entrée du programme de simulation.

Avec les paramètres présentés dans le tableau 3-1, on obtient les caractéristiques de l'anneau suivantes

Temps d'amortissement synchrotron τ_s (s)	0.492
Fréquence synchrotron f_s (MHz)	1.35 1
Déviation d'énergie à l'équilibre σ_ε	9.973 10^{-5}
Longueur du paquet à l'équilibre σ_τ (ps)	1.3

Tableau 3-2 Paramètres caractéristiques de l'anneau

Les valeurs indiquées sur le tableau 3-1 sont celles utilisées dans les simulations. Lorsqu'un paramètre est varié, les autres sont conservés constants.

Avant de considérer l'effet de l'interaction Compton, nous avons étudié la dynamique du faisceau dans l'anneau sans aucune interaction. La figure 3.3 représente l'évolution de la longueur du paquet ainsi que la dispersion en énergie sur 3 *ms*.
Dans le chapitre II de cette partie, nous avons calculé l'équation de l'évolution de la longueur du paquet d'électrons dans un anneau en fonction du temps en présence de rayonnement synchrotron (cf. équation(II.4.12)). C'est l'équation d'un oscillateur harmonique amorti. Sur la figure 3.3, on retrouve bien ces oscillations dues au rayonnement synchrotron. Sur ces deux courbes, on peut distinguer deux phases :

- La première phase qui est caractérisée par des oscillations de grandes amplitudes de la longueur du paquet ainsi que de la dispersion en énergie.
- Une phase caractérisée par des oscillations d'amplitudes moins importantes que dans la première phase.

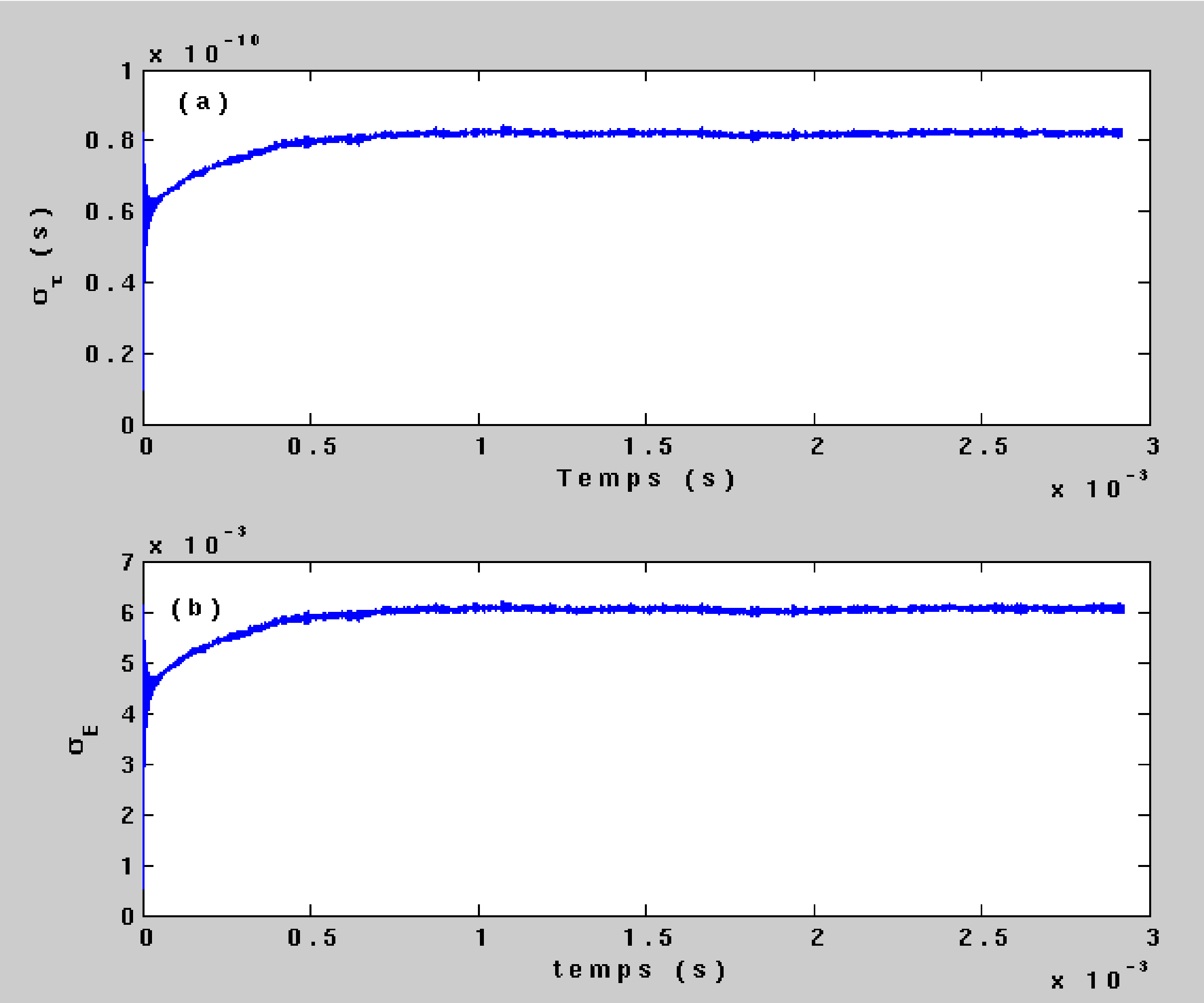


Figure 3.3 (a) longueur du paquet en fonction du temps sans interactions Compton
(b) dispersion en énergie du paquet en fonction du temps sans interactions Compton

Lorsqu'on injecte le faisceau dans l'anneau avec une dispersion en énergie et une longueur du paquet différentes des valeurs d'équilibre présentées dans le tableau 3-2, le système oscille et tend vers un état qui résulte de l'équilibre entre le rayonnement synchrotron et l'excitation quantique.

Pour comprendre ce qui se passe, reprenons l'équation donnant la longueur du paquet en fonction de la dispersion en énergie :

$$\sigma_\tau = \frac{\alpha}{2\pi f_s}\sigma_E \qquad \text{(III.2.2)}$$

Lorsque les valeurs d'injection sont différentes des valeurs à l'équilibre, le paquet oscille, ces oscillations sont d'autant plus importantes que le rapport $\left(\frac{\sigma_\tau}{\sigma_E}\right)_{injection} > \left(\frac{\sigma_\tau}{\sigma_E}\right)_{équilibre} = \left(\frac{\alpha}{2\pi f_s}\right)$

Au début du processus, les oscillations ont de grandes amplitudes. Au fur et à mesure que l'on se rapproche des valeurs d'équilibres l'amplitude des oscillations diminue. L'état d'équilibre est atteint au bout d'un temps de l'ordre du temps d'amortissement synchrotron τ_s=0.492. Sur la figure 3.3 on est encore loin de l'état de l'équilibre. Au bout de 3 *ms*, la longueur du paquet est de 80 *ps* et la dispersion en énergie est de 0,6 %. La longueur du paquet et la dispersion en énergie diminuent très sensiblement dans le temps.

2.2.1. Effet de l'angle de croisement entre les deux faisceaux

L'étude de conception de l'anneau Compton prend en compte un angle de croisement entre le faisceau laser et le faisceau d'électrons au point d'interaction afin de s'assurer que les rayons produits ne détériorent pas les miroirs de la cavité optique [80].

Nous avons estimé le flux produit pour deux valeurs de l'angle de croisement α_c 8° et 2°. Les variations des flux en fonction du temps sont présentées sur la figure 3.4. Les variations de la dispersion en énergie et la longueur du paquet sont illustrées sur la figure 3.5.

Les deux courbes représentant le flux de photons produit, pour les deux cas 8° et 2°, présentent deux phases distinctes, une première phase qui présente une décroissance exponentielle avec une pente raide et une deuxième phase où la décroissance est linéaire moins rapide.

Dans la première phase, la distribution des électrons est détériorée sous l'effet de l'interaction Compton, qui est traduit par la correlation de la perte d'énergie et l'allongement du paquet par l'intermédiaire du facteur de compression des moments α (cf équation (II.4.15). Dans cette phase l'amplitude des oscillations synchrotron est importante car le paquet est encore loin de l'état de l'équilibre.

Dans la deuxième phase, l'amplitude des oscillations devient moins importante et la décroissance du flux est moins rapide. Dans cette phase les électrons sont redistribués et le paquet d'électrons commence à s'amortir sous l'effet du rayonnement synchrotron ainsi on se retrouve dans un état qui résulte de l'excitation, l'amortissement synchrotron et l'interaction Compton.

Avec un angle de croisement de 8°, nous obtenons un flux initial d'environ 1,25 10^{13} photons/s. Cependant, au bout d'environ 0,5 *ms* ce flux chute jusqu'à 0,4 10^{13} photons/s. Dans la deuxième phase la perte de flux ralentit, il passe de 0,4 10^{13} photons/s à 0,3 10^{13} photons/s en 2 *ms*, soit une perte de 0,2 10^{13} photons/s.

Avec un angle de croisement de 2°, en début du processus, le flux produit est d'environ 5 10^{13} photons/s, soit trois fois plus que pour un angle de 8°. Ce flux chute ensuite jusqu'à 1.8 10^{13} photons/s en 0,25 *ms*. Donc comparée au cas d'un angle de croisement de 8°, la perte de flux dans la première phase est environ 2 fois plus rapide. Dans la deuxième phase, au bout de 2 *ms*, le flux est d'environ 1,5 10^{13} photons/s. Donc la perte du flux est plus rapide que dans le cas d'un angle de 8°. Néanmoins, il reste toujours supérieur.

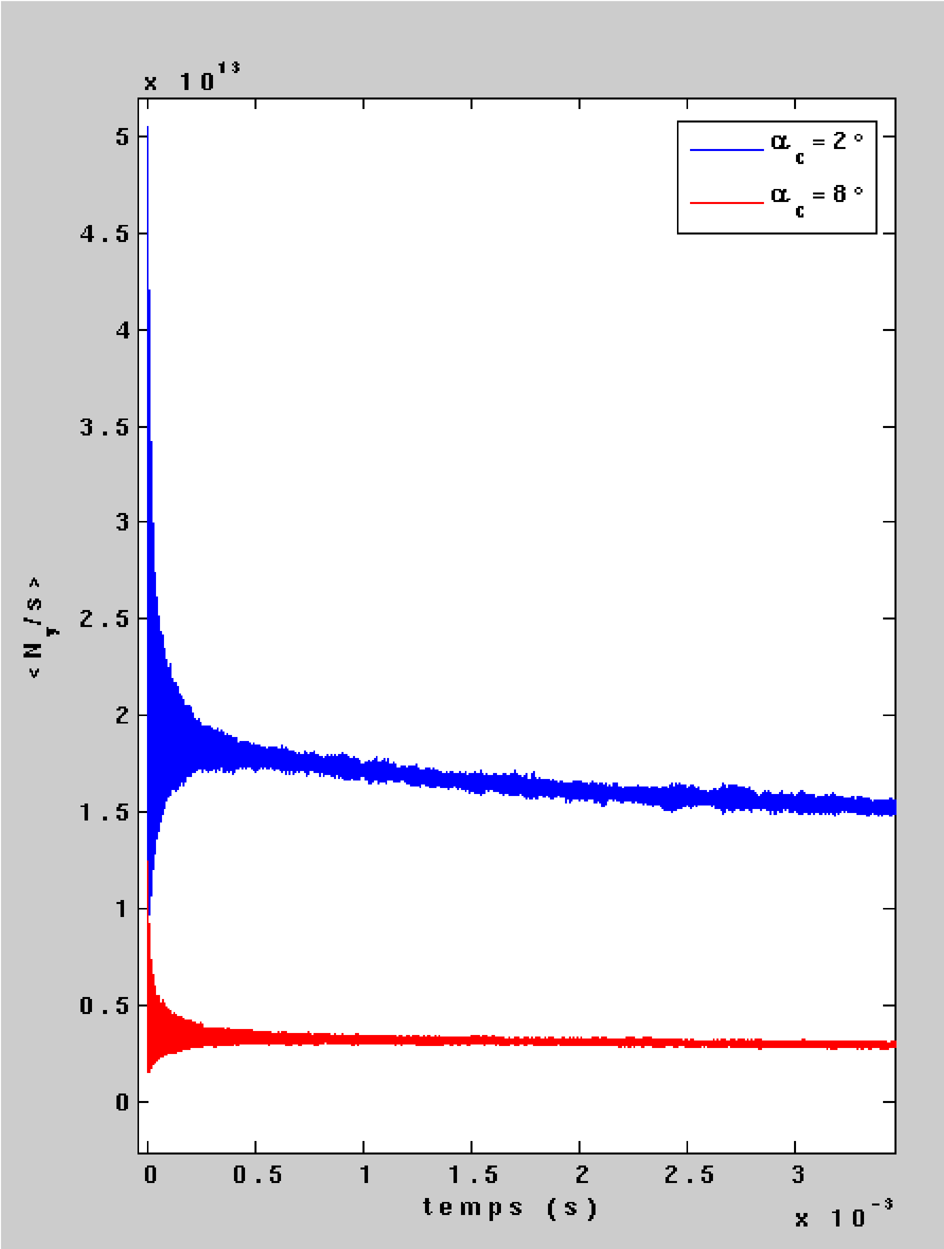


Figure 3.4. Variation des flux en fonction du temps. (en bleu) pour un angle de croisement α_c=2°. (en rouge) pour α_c=8°

La figure 3.5 montre l'évolution de la longueur du paquet et de sa dispersion en énergie pour les deux valeurs 2° et 8° de l'angle de croisement. Tout comme pour le flux, on peut remarquer que l'amplitude des oscillations est importante au début puis diminue de plus en plus. La longueur du paquet σ_τ augmente considérablement dans les premières, elle passe de 4,8 *ps* à environ 80 *ps*. Ensuite, sous l'effet de l'excitation quantique et l'amortissement synchrotron, elle tend vers 60 *ps*.
Il se produit la même chose pour la dispersion en énergie qui présente des oscillations au début puis tend vers 0,41%.

A cette échelle de temps, il n'y a pas une grande différence entre un angle de 8° ou 2°. Et la longueur du paquet et sa dispersion en énergie n'augmentent que très sensiblement. Si on compare la figure 3.5 avec la figure 3.3, on constate que l'interaction Compton diminue l'allongement du paquet et sa dispersion en énergie initiale. Au bout de 3 *ms*, la longueur du paquet, en présence d'interaction Compton est de 60 *ps* alors qu'elle était de 80 *ps* en l'abscence d'interaction. La dispersion d'énergie est de 0,41 *ps*, alors qu'elle était de 0,6 % sans interaction Compton.

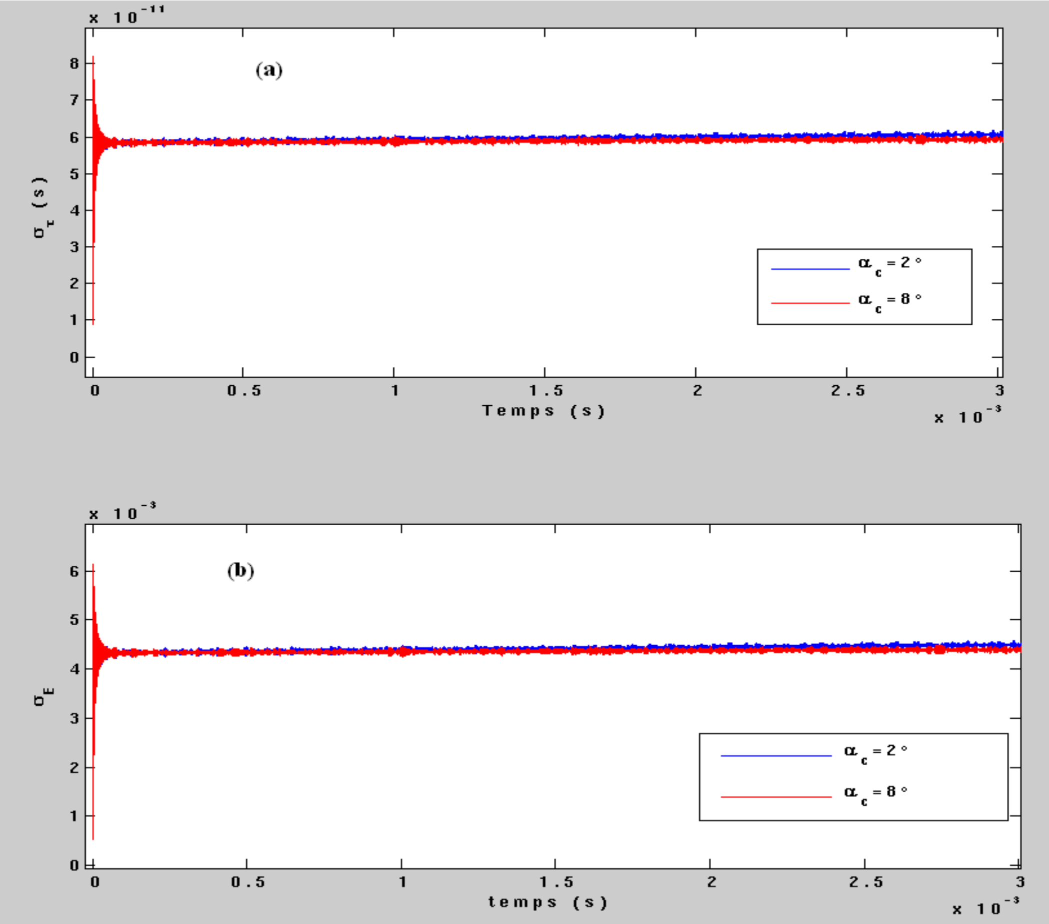


Figure 3.5. Effet de l'angle de croisement sur le paquet d'électrons. (en haut) Variation de la longueur du paquet en fonction du temps. (en bas) Variation de la déviation en énergie en fonction du temps.

La figure 3.6(a), (b) et (c) montre l'évolution dans le temps de la longueur du paquet, la dispersion de l'énergie et du flux de rayons X produits sur un temps plus long.

En comparant les courbes de figure 3.6(a), (b) à la figure 3.5, on constate l'effet du rayonnement compton sur l'allongement du faisceau ainsi que sa dispersion en énergie. En effet, au lieu de se stabiliser à une valeur, comme c'est le cas sans interaction Compton, la longueur du paquet et sa dispersion en énergie continuent d'augmenter. Ce que l'on peut remarquer aussi est le fait que l'allongement du paquet est plus important pour un angle de croisement de 2° que pour un angle de croisement de 8°. Au bout de 60 *ms*, la longeur du paquet atteint environ 70 *ps* dans le cas de 8° et 90 *ps* pour un angle de 2°.

Le même phénomène est observé dans le cas de déviation en énergie. Dans le cas d'un angle de 8°, la dispersion en énergie atteint 0,5%. Dans le cas d'un angle de 2°, la dispersion en énergie atteint 0,6 %.

L'allongement du paquet et l'augmentation de la dispersion en énergie a des conséquences sur le flux de rayons X produits (figure 3.6(c)). Le flux continue à diminuer au cours du temps, mais ce que l'on peut constater est que, le flux reste toujours plus important pour un angle de croisement plus réduit. Cependant, la perte de flux est moins rapide dans le cas de 2° que dans le cas de 8°.

D'après l'équation(I.1.17), un angle de croisement réduit permet d'avoir un flux plus important. Il est donc important de construire une machine avec un angle de croisement le plus petit possible. Ce point est à prendre en considération pour le choix de la géométrie du résonateur optique. Cependant, pour le choix de l'angle de croisement dans l'anneau de RADIOTHOMX, il est important de considérer, selon qu'on veut avoir un flux constant dans le temps ou un flux important mais qui décroît au cours du temps. Les chiffres précédents montrent que certe un angle de croisement de 2° permet d'avoir un flux plus important mais sa décroissance est plus rapide que pour le cas d'un angle de croisement de 8°.

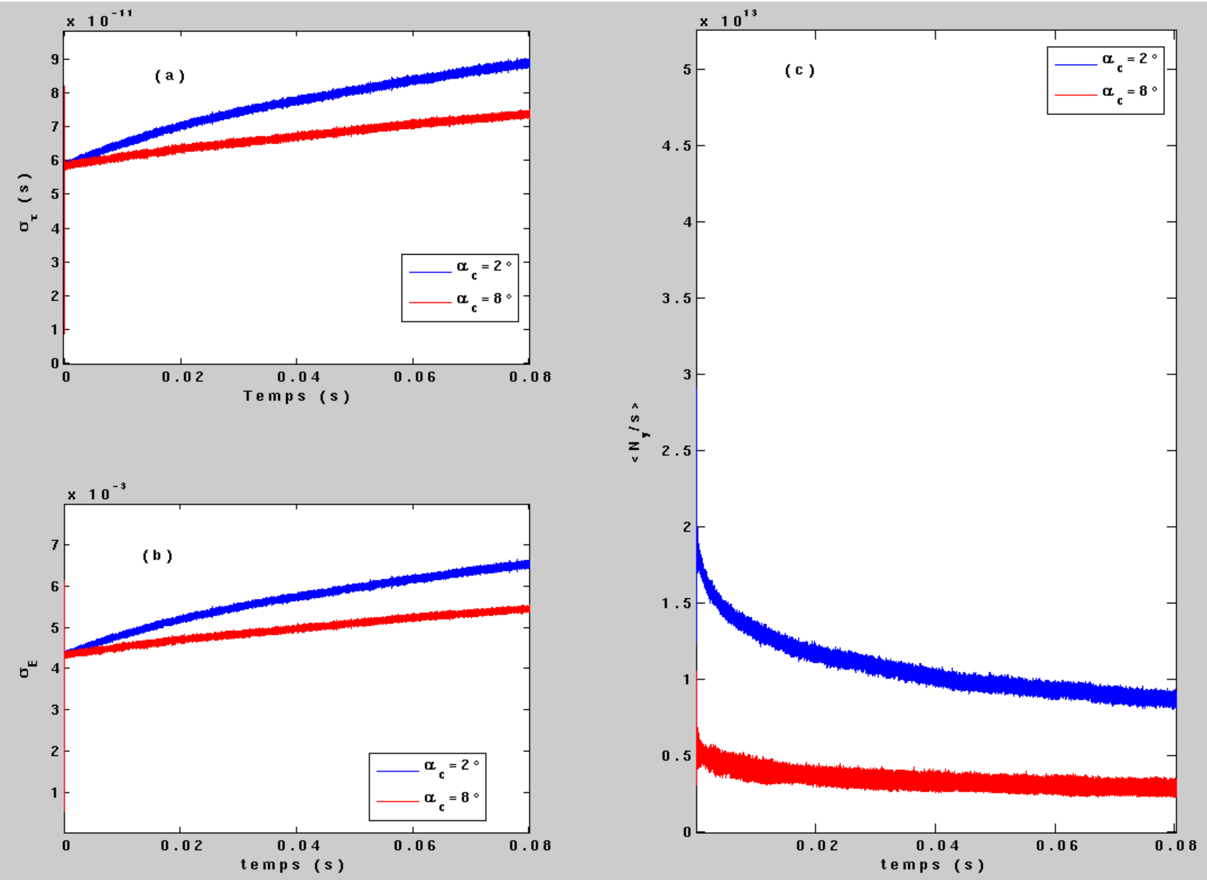


Figure 3.6 (a) la longueur du paquet en fonction du temps. (b) déviation en énergie en fonction du temps. (c) le flux de rayons X produits en fonction du temps.

2.2.2. Effet des dimensions transverses des faisceaux

Un autre paramètre crucial dont il faut tenir compte est la taille du waist du faisceau laser. Les dimensions du paquet d'électrons étant de 50 μm, pour voir l'effet d'une différence de dimensions des deux faisceaux sur le flux, nous avons estimé le flux produit par l'interaction Compton pour deux valeurs de la taille transverse du faisceau laser 100μm et 60μm. Les résultats obtenus sont portés sur la figure 3.7.

Sur la figure 3.7.(a), on constate que le flux produit avec un faisceau de σ_L=60μm est de 4 10^{13} *photons/s* à t =0 s. Cependant, au bout de 0.25 *ms*, ce qui correspond à la première phase, sous l'effet du rayonnement, cette valeur chute jusqu'à 1.5 10^{13}*photons/s*. Dans la deuxième phase, le flux passe de 1,5$10^{13}$ *photons/s* à 1,25 10^{13}*photons/s* en 2 *ms*.

Alors que dans le cas d'un faisceau de σ_L=100μm (figure 3.7.(b)), le flux maximum obtenu est seulement de 2 10^{13} *photons/s* à t=0 *s*, soit un facteur 2 par rapport à σ_L=60μm. Cette valeur chute à 1 10^{13}*photons/s* en 0.25 *ms*, soit une perte de 50% du flux initial contre 63% dans le cas précédent de σ_L=60μm. Dans la deuxième phase, le flux passe de 10^{13}*photons/s* à environ 0,8 10^{13}*photons/s* en 2 *ms*.

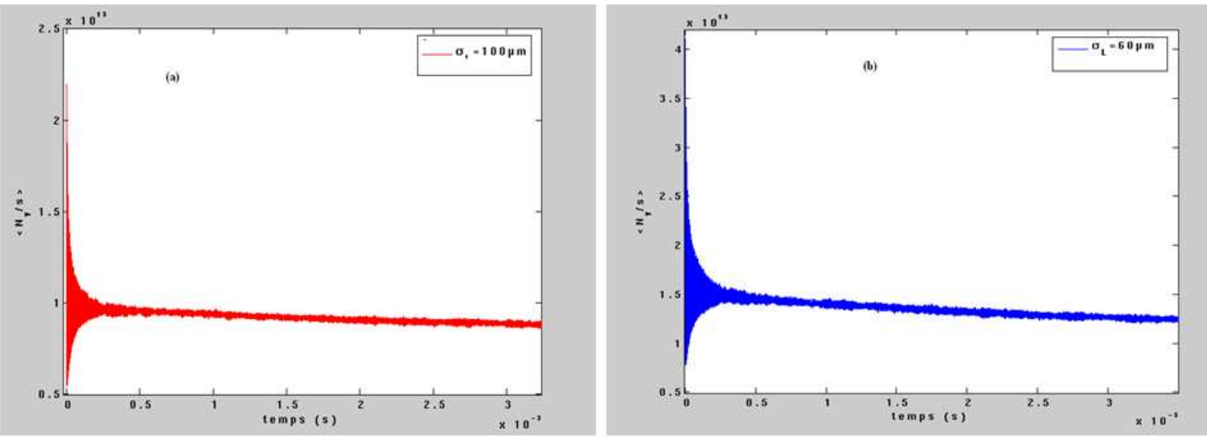


Figure 3.7. Effet des dimensions du faisceau laser sur le flux. (a) évolution du flux en fonction du temps pour σ_L=100*µm*. (b) évolution du flux en fonction du temps flux pour σ_L=60*µm*.

En se référant à l'équation(I.1.17), la luminosité est inversement proportionnelle aux dimensions transverses des deux faisceaux d'électrons et laser. Cela permet d'expliquer la différence de flux produits dans le cas de σ_L=60 μm et σ_L=100 μm. avec les mêmes dimensions du faisceau d'électrons, la luminosité est plus élevée pour un faisceau laser plus focalisé.

Par ailleurs, le faisceau laser dans le cas de σ_L=60 μm est presque de la même taille que le paquet d'électrons qui lui est de 50 μm. Par conséquent, le recouvrement des deux faisceaux est meilleur que dans le cas de σ_L=100 μm et le flux est donc plus important.

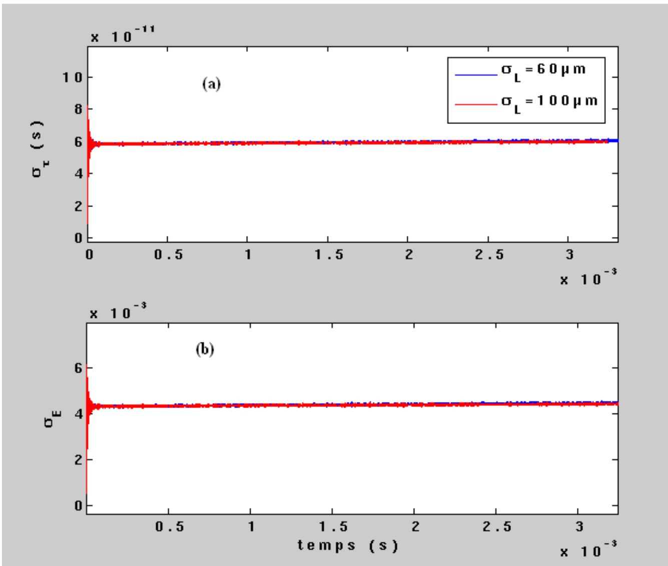


Figure 3.8 Effet de la taille du faisceau laser sur les caractéristiques du faisceau(a)largeur du paquet en fonction du temps. (b) la dispersion de l'énergie en fonction du temps.

La figure 3.8 représente les variations de la longueur du paquet et de sa dispersion en énergie en fonction du temps. Sur le nombre de tours considérés, on ne constate pas d'effet de la variation de la taille du faisceau laser. Nous avons donc refait le calcul pour un temps plus long. La figure 3.8(a) (b) (c) représente les résultats obtenus sur 80 *ms*.

.

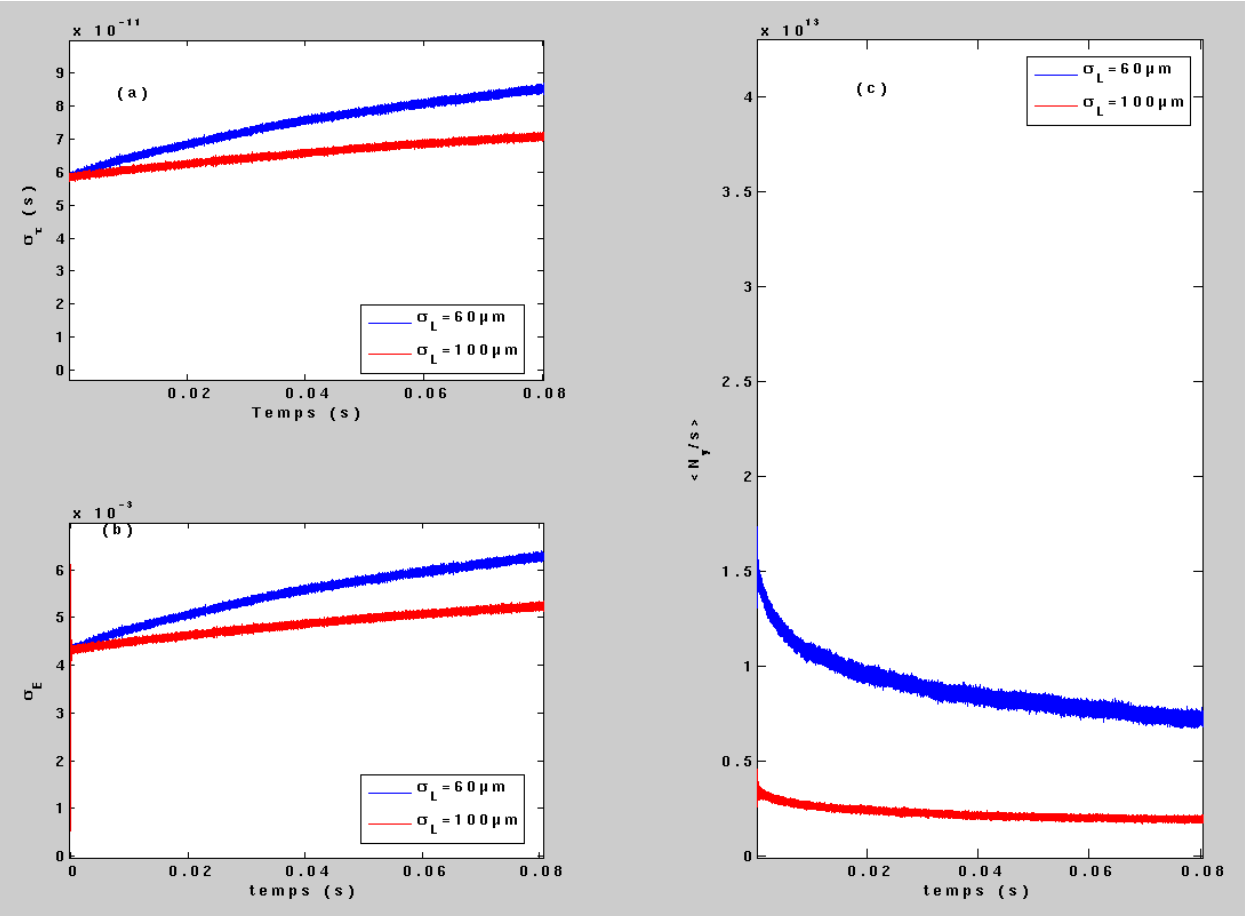


Figure 3.9 (a)largeur du paquet en fonction du temps. (b) la dispersion en énergie en fonction du temps. (c) le flux de rayons X en fonction du temps sur un temps t=30 ms

Sur la figure 3.8(a) (b), on peut remarquer l'effet de l'interaction Compton sur la longueur du paquet et sa dispersion en énergie. La longueur du paquet atteint 90 *ps*, dans le cas de σ_L=60 μm, et 70 *ps* dans le cas de σ_L=60 μm. Le paquet s'allonge donc plus dans le cas d'un laser plus focalisé. Il se passe la même chose pour la dispersion en énergie, ce qui est normal car les deux grandeurs sont corrélées, elle atteint 0,65% pour σ_L=60 μm et seulement 0,51% pour σ_L=100 μm.

L'évolution des flux produits dans les deux cas est présentée sur la figure 3.8(c), on peut remarquer que le flux reste toujours plus important pour un faisceau laser plus focalisé. Cependant, la perte de flux est moins rapide dans le cas de σ_L=100 μm que dans le cas de σ_L=60 μm. Au bout de 80 *ms*, le flux est passé de 5,5 10^{13} *photons/s* à 0,75 10^{13} *photons/s*, soit une perte d'environ 87% du flux initial, pour un faisceau laser de σ_L=60 μm. Dans le cas de σ_L=100 μm, le flux est passé de 2 10^{13} *photons/s* à 0,25 10^{13} *photons/s*, ce qui correspond à une perte de 80% du flux initial. Par ailleurs, le flux dans le cas de σ_L=60 μm présente des oscillations plus importantes que dans le cas σ_L=100 μm.

Pour augmenter le flux, on doit d'un coté, concevoir une cavité optique qui permet d'avoir un très petit waist, et d'un autre coté réaliser une très forte focalisation du faisceau d'électrons.

Par ailleurs, en plus de la réduction de leurs dimensions transverses, les deux faisceaux doivent être parfaitement adaptés et synchronisés pour augmenter la probabilité d'interaction.

2.2.3. Effet du facteur de compression des moments α

Un autre paramètre dépendant de l'optique de la machine et dont il faut prendre en compte est le facteur de compression des moments α. Nous avons estimé le flux pour deux valeurs de ce paramètre α=0,1 et α=0,01. Les variations des flux produits dans chaque cas sont représentées sur la figure 3.10.
Le flux maximum produit dans le cas α=0,01 est de 5,5 10^{13} *photons/s*, aprés 0.5 *ms*, cette valeur baisse jusqu'à 4 10^{13} *photons/s*, puis passe à 3,5 10^{13} *photons/s* en 2 *ms*.
Cependant, pour α=0,1, au début du processus, nous avons un flux de 2,5 10^{13} *photons/s*, soit un facteur 2 moins que le cas précédent. Le flux diminue ensuite jusqu'à 1.5 10^{13} *photons/s* au bout de 0.5ms. Durant les 2 *ms*, le flux ne diminue presque pas.

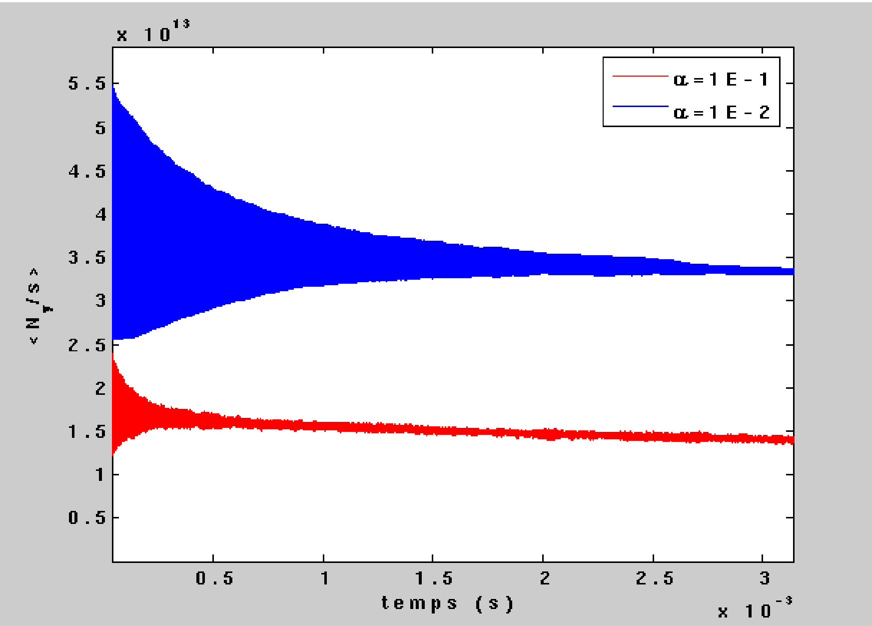


Figure 3.10. Evolution du flux de rayons X en fonction du temps pour deux valeurs de compression des moments. Effet du facteur de compression des moments. (En bleu) α = 10^{-2}. (en rouge)) α = 10^{-1}.

La figure 3.11 représente les variations de la longueur du paquet et de la déviation d'énergie dans les deux cas α=0,1 et α=0,01. La comparaison de la figure 3.10. et la figure 3.11. montre la corrélation entre la dispersion en énergie, les dimensions du paquet et le flux produit et l'influence de α sur chacun de ces paramètres.
Pour $\alpha = 0.1$ la largeur du paquet augmente de 4.8 *ps* à 60 *ps* en 3*ms*. Pour $\alpha = 0.01$, la longueur du paquet est passée de 4.8 *ps* à 20 *ps*. L'amplitude des oscillations dans le cas de α=10^{-2} est plus importante que dans le cas de α=0,1.

Pour comprendre d'où vient la cause de cette différence, reprenons l'équation(III.2.2)
Avec les valeurs d'injection $\sigma_\tau = 4{,}8\ 10^{-12}$ et $\sigma_E = 6\ 10^{-3}$ on obtient

$$\left(\frac{\sigma_\tau}{\sigma_E}\right)_{injction} \simeq 8\ 10^{-10} \qquad \text{(III.2.3)}$$

à l'équilibre, pour $\alpha = 0.01$ on obtient :

$$\left(\frac{\sigma_\tau}{\sigma_E}\right)_{\acute{e}quilibre} = \frac{\alpha}{2\pi f_s} = 4{,}6\ 10^{-9}$$

et pour $\alpha = 0.001$, on obtient :

$$\left(\frac{\sigma_\tau}{\sigma_E}\right)_{\acute{e}quilibre} = \frac{\alpha}{2\pi f_s} = 4{,}6\ 10^{-10}$$

Le rapport entre la longueur du paquet et la dispersion d'énergie pour α=10^{-2} à l'injection est plus proche de ce même rapport donné par les valeurs à l'équilibre, les oscillations sont par conséquent plus réduites que dans le cas de α=10^{-1}.

Sur les figures précédentes l'effet de l'interaction Compton n'apparaît pas clairement car l'échelle de temps n'est pas suffisante. Les résultats du calcul pour 80 ms sont présentés sur la figure 3.12 .
En comparant les courbes de la figure 3.12(a)(b) à la figure 3.11(a)(b) et la figure 3.12(c) à la figure 3.10, on constate que, sous l'effet de l'interaction Compton, la longueur du paquet ainsi que sa déviation en énergie augmentent de plus en plus au cours du temps. Cette augmentation est plus importante pour un facteur de compression des moments α=0,1 que pour α=0,01.
Au bout de 40 *ms*, la longueur du paquet atteint environ 80 *ps* pour α=0,1 et environ 30 *ps* dans le cas de α=0,01.

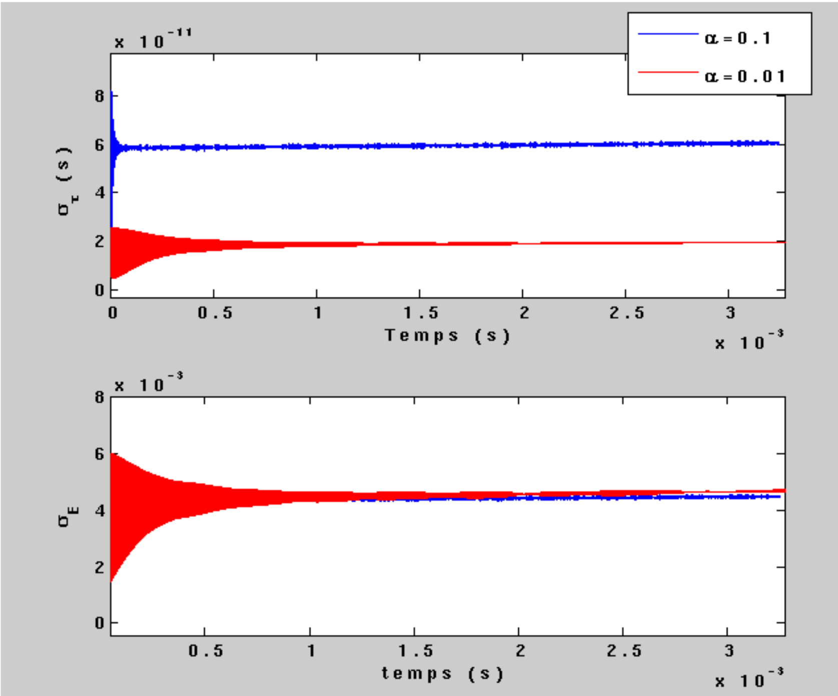


Figure 3.11. Longueur du paquet d'électrons (en haut) et dispersion en énergie (en bas) en fonction du temps.

En ce qui concerne la dispersion en énergie, pour un facteur α=0,1, la dispersion en énergie atteint 0,58 %. Dans le cas de α=0,01, la dispersion en énergie atteint 0,7 %.
L'allongement du paquet et l'augmentation de la dispersion en énergie se répercutent sur le flux de rayons X produits (figure 3.12(c)). Le flux continue à diminuer au cours du temps,

mais ce que l'on peut constater est que, le flux reste toujours plus important pour un facteur de compression des moments plus réduit.

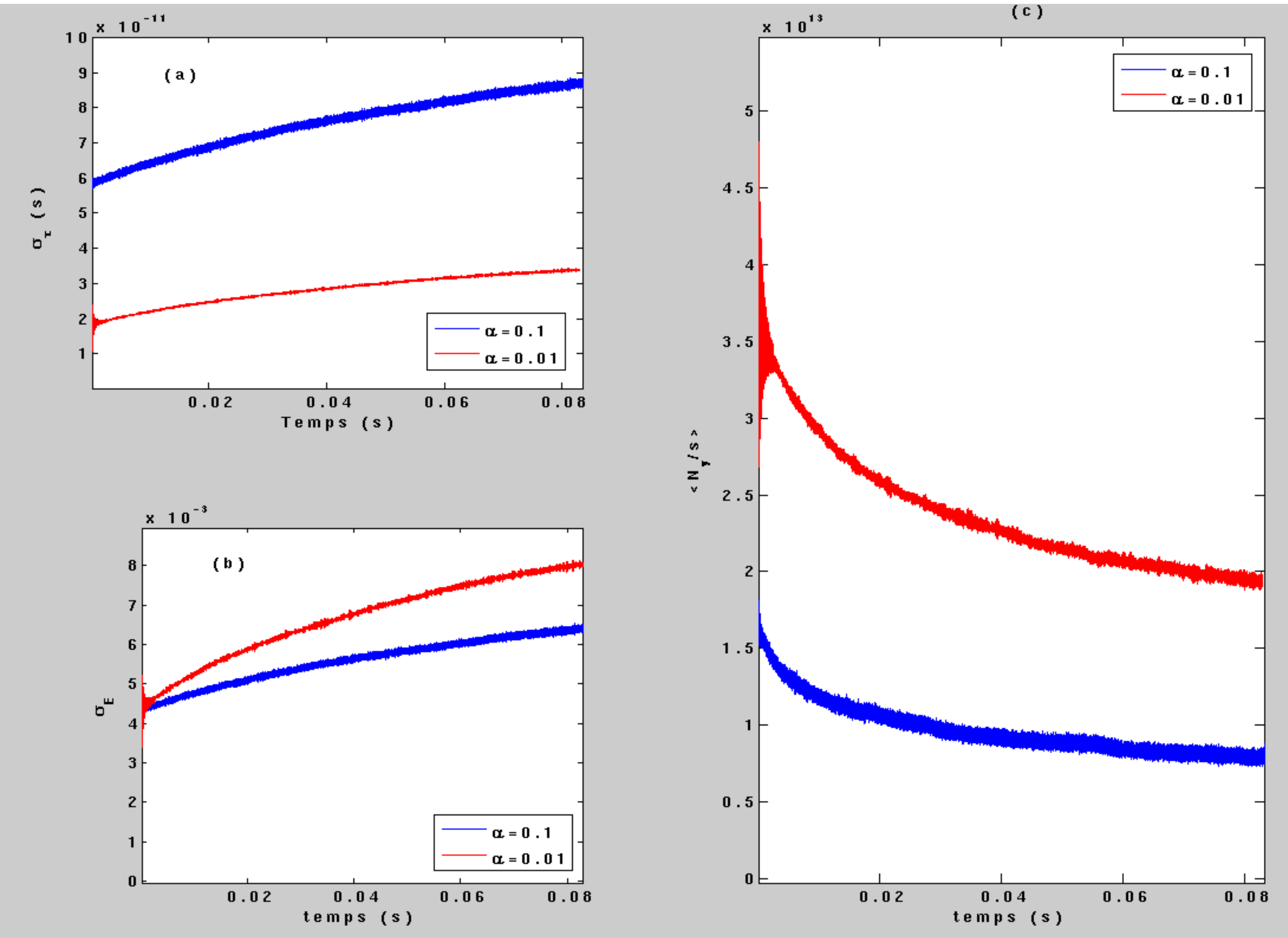


Figure 3.12. (a) largeur du paquet en fonction du temps. (b) la déviation de l'énergie en fonction du temps. (c) le flux de rayons X en fonction du temps sur un temps t=30 ms. (en rouge) pour α=0,01 et (en bleu) pour α=0,1.

La réduction du facteur α permet de garder un paquet plus court. La longueur du paquet d'électrons est reliée à la perte d'énergie (par conséquent à la dispersion d'énergie) par le facteur de compression des moments α (équation (II.4.6) du chapitre 1). Par conséquent, plus α est petit moins la longueur du paquet augmente.
D'après l'équation(I.1.17), la luminosité est inversement proportionnelle à la longueur du paquet, réduire α revient à augmenter la luminosité et donc le flux de photons produits.
Il est donc essentiel de concevoir une machine avec un facteur α le plus petit possible. Cependant, un facteur de compression des moments très réduits engendre des oscillations plus importantes.
Il conviendrait d'étudier l'impact de ces oscillations pour les applications médicales.

2.2.4. Effet de la longueur du paquet à l'injection

En réalité dans une collision qui n'est pas frontale, l'angle de collision n'est pas le seul facteur à prendre en compte dans l'estimation de la perte de flux. Un autre paramètre tout aussi important est la longueur d'impulsion des deux faisceaux. Il faut, en effet, considérer le cas où l'un des deux paquets est plus court que l'autre. Donc la perte de flux est donnée non pas uniquement par la perte dans la section efficace due à l'angle de croisement non nul, mais aussi du temps réduit du croisement des deux paquets. Nous avons donc estimé le flux pour deux longueurs de paquet σ_τ=10 *ps* et σ_τ=4.8 *ps* pour constater la différence. Dans un premier temps, nous avons changé la longueur du paquet en conservant une dispersion en énergie de 0,6. En réalité la longueur du paquet et la dispersion en energie en sortie du Linac d'injection étant corélées [81], nous avons également varié la dispersion en énergie. Les résultats obtenus avec les paramètres d'injection σ_E =0.6% et σ_τ=10*ps* et pour σ_E =0.3% et σ_τ=10*ps* sont présentés sur la figure 3.14. et la figure 3.15.

La Figure 3.15 représente les résultats obtenus avec σ_E =0.6% et σ_τ=4.8 *ps.*

On peut voir qu'en réduisant la longueur du paquet de $\sigma\tau$ = 10 *ps* $\sigma\tau$ = 4.8 *ps*, le flux produit a augmenté de 2,5 10^{13} *photons/s* à 4,5 10^{13} *photons/s.*

Le fait d'injecter avec un faisceau de longueur réduite, donc plus proche de la longueur d'équilibre, réduit les oscillations de la longueur du paquet au début du processus. Par conséquent la luminosité de l'interaction est optimisée. Il est donc préférable d'injecter l'anneau avec des valeurs les plus proches des valeurs d'équilibre, dans la limite des contraintes du linac [81].

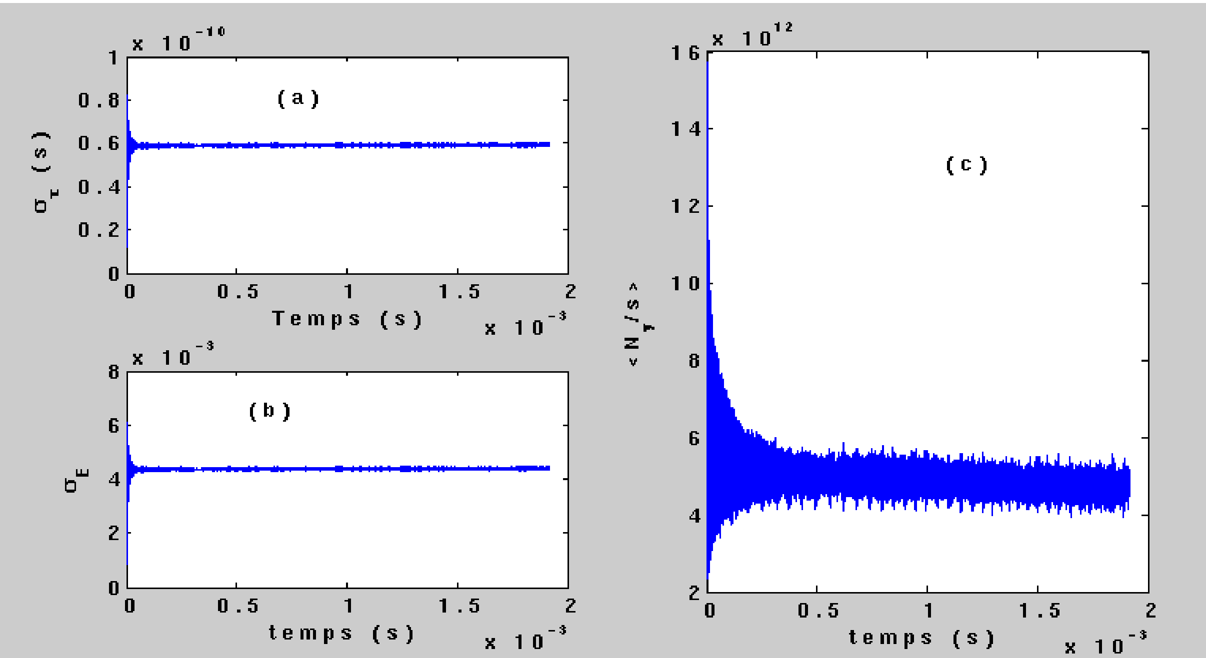


Figure 3.13 (à gauche) La longueur du paquet et la dispersion en énergie. (à droite) Le flux de photons pour des paramètres d'injections σ_E =0.6% et σ_τ=10*ps*.

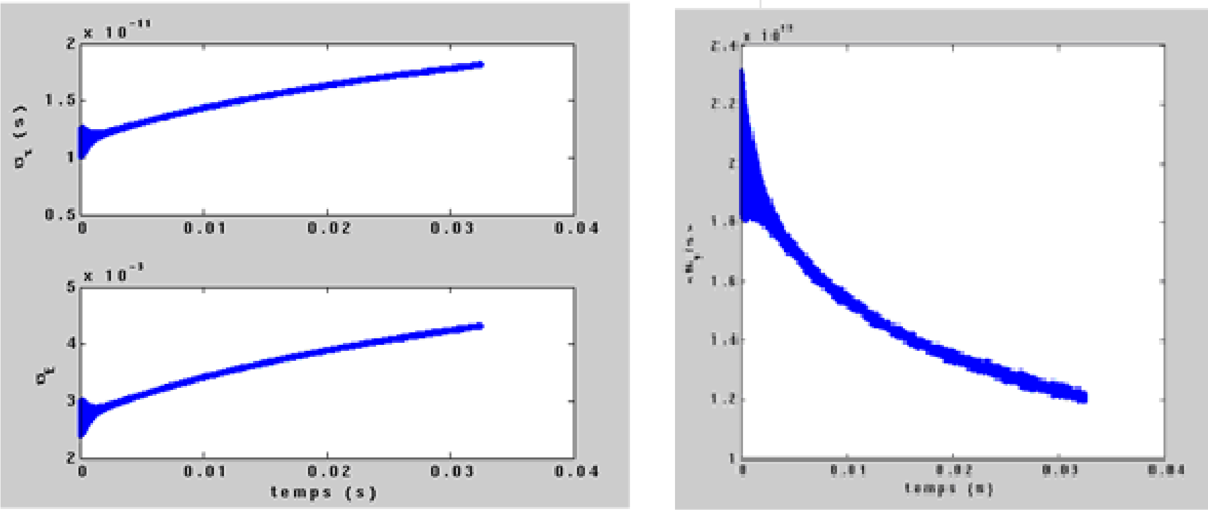


Figure 3.14. (à gauche) La longueur du paquet et la dispersion en énergie. (à droite) Le flux de photons pour des paramètres d'injections σ_E =0.3% et σ_τ=10*ps*.

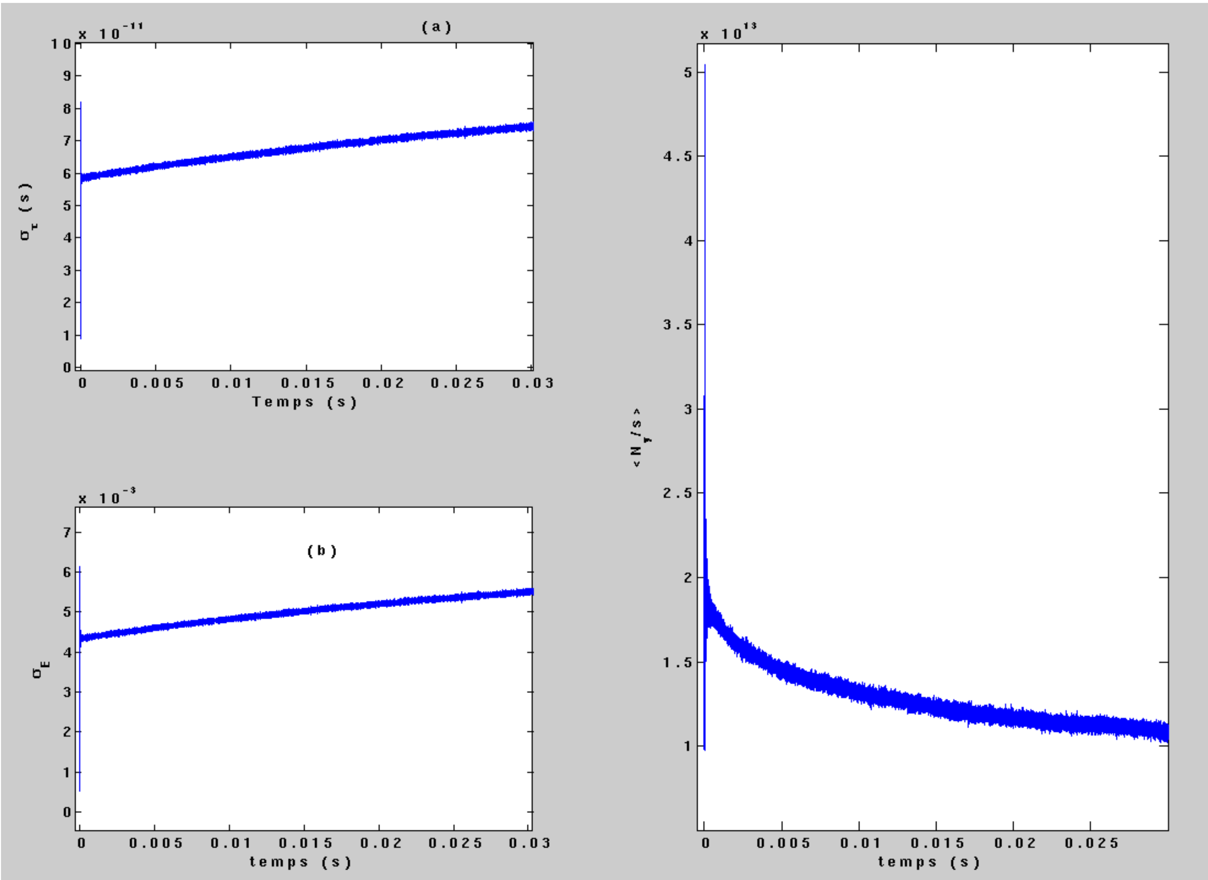


Figure 3.15. (a) La longueur du paquet (b) la dispersion en énergie. (c) Le flux de photons pour des paramètres d'injections σ_E =0.6% et σ_τ=4.8 *ps*

A l'issue de cette étude, nous avons pu ressortir les paramètres qui permettent d'optimiser le flux. Nous avons constaté que pour certains paramètres, même si le flux est important, sa décroissance est assez rapide. Donc pour décider quels paramètres adapter pour les applications médicales il faut prendre en compte le temps d'intégration du flux et des effets

des oscillations synchrotrons dans le cas ou une injection fréquente sans attendre l'établissemnt de l'équilibre est choisie.
Si l'on considére que l'objectif est de réaliser un flux important sans se soucier de sa décroissance dans le temps, les valeurs optimales qui ressortent des simulations précédentes sont résumées dans le tableau ci-dessous

Symbole (unité)	Valeurs
α_1	0.01
σ_{xe}(µm)	50
σ_{xe}(µm)	50
σ_{xL}(µm)	50
σ_{yL}(µm)	50
σ_{sL}(ps)	1
α_c (rad)	2°
σ_E	$6\ 10^{-3}$
σ_{se} (ps)	4,8

Tableau 3-3 paramètres optimum de fonctionnement de la machine

Les résultats de la simulation avec ces paramètres sont présentés sur la figure 3.15. pour cette simulation, nous avons considéré un temps plus long pour mieux estimer l'allongement du paquet engendré par les collisions Compton ainsi que la perte de flux qui en résulte.
La longueur du paquet injectée est de 4,8 ps, au bout de 100 *ms*, le paquet s'allonge jusqu'à 38 *ps*, la dispersion en énergie quant à elle atteint 0,8%. Cet allongement du paquet entraine une perte de flux, au bout de 20 ms, qui pourrait correspondre au temps d'injection, le flux passe de 5,6 10^{13} *photons/s* à environ 2,75 10^{13} *photons/s.*

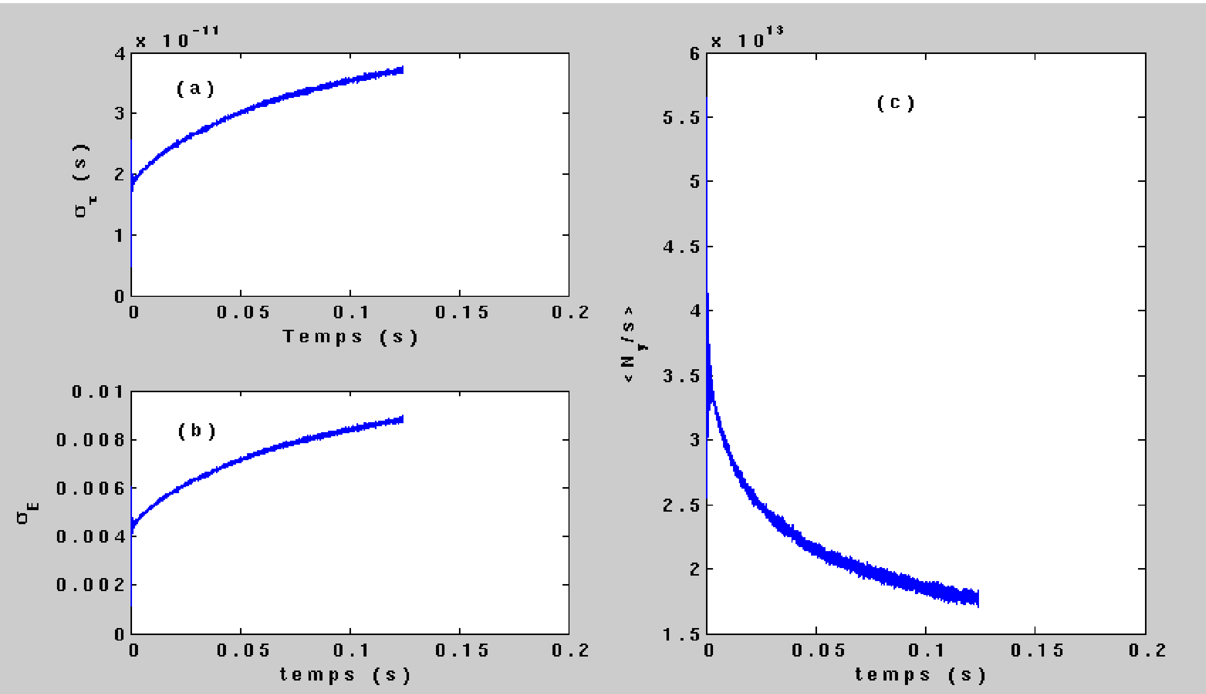


Figure 3.16 Evolution en fonction du temps de (a) la longueur du paquet. (b) la dispersion en énergie. (c) le flux de rayon X. avec les paramètres optimisés.

3. Paramètres choisis pour la machine

La réalisation d'un anneau pouvant satisfaire tous les paramètres précédents, impose des contraintes considérables. Cependant, pour relaxer ces contraintes, un autre ensemble de paramètres plus souples mais permettant de produire le flux de rayons X qui reste intéressant a été proposé [79]. Au lieu du flux de l'ordre de 10^{13} *photons/s* obtenu avec les paramètres optimisés du tableau 3-3. Nous avons pu réaliser un flux de l'ordre de 10^{11} *photons/s*.
Nous avons pris comme paramètres les suivants :
Pour faciliter la focalisation du faisceau d'électrons, nous avons considéré des dimensions transverses du paquet d'électrons de $80\mu m$ au lieu de 50 µm. D'un autre côté, avoir des paquets moins focalisés permet de diminuer les effets de charge d'espace et augmenter ainsi la durée de vie Touschek.
Pour assouplir les contraintes sur la réalisation du résonateur optique, nous avons considéré des dimensions transverses du paquet de photons de $250\mu m$ au lieu de 50µm et une énergie des photons de 20 *mJ* au lieu de 30 mJ. Nous avons également pris une longueur de pulse de 5 ps au lieu de 1 ps.
Nous avons aussi considéré un anneau pluslong de 12 *m* au lieu de 9 *m* afin de pouvoir insérer tous les éléments et avoir plus de marge pour insérer le résonateur optique

Par ailleurs pour minimiser les effets de charge d'espace et les effets d'impédance, une charge de 0.5 *nC* au lieu de 1*nC* a été considérée.

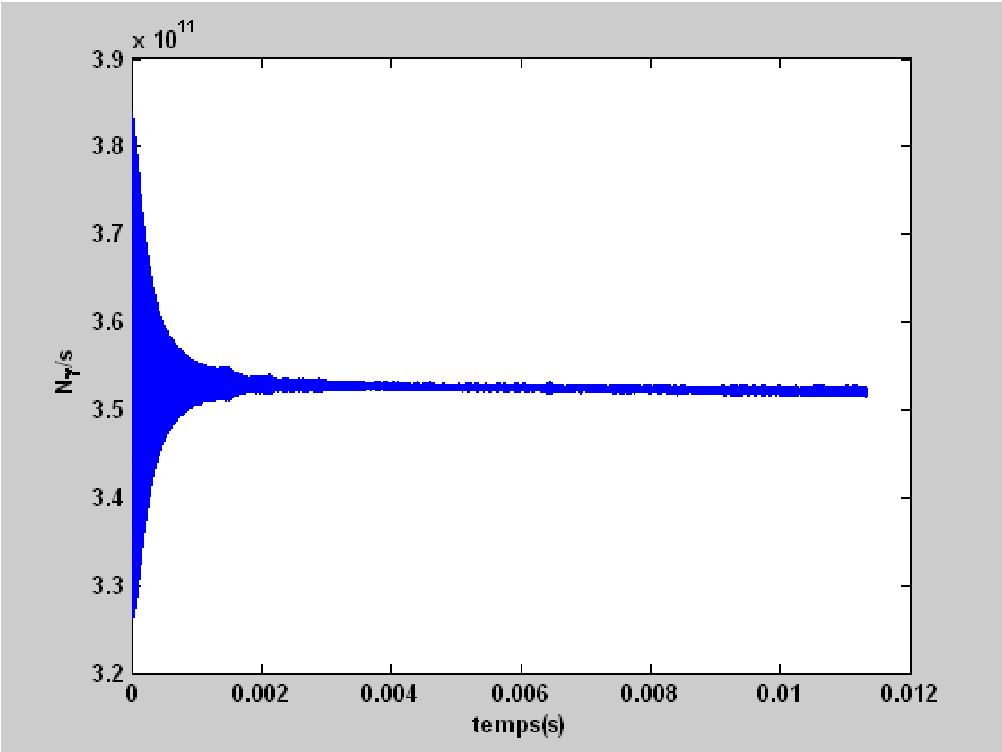


Figure 3.17. flux avec les nouveaux paramètres

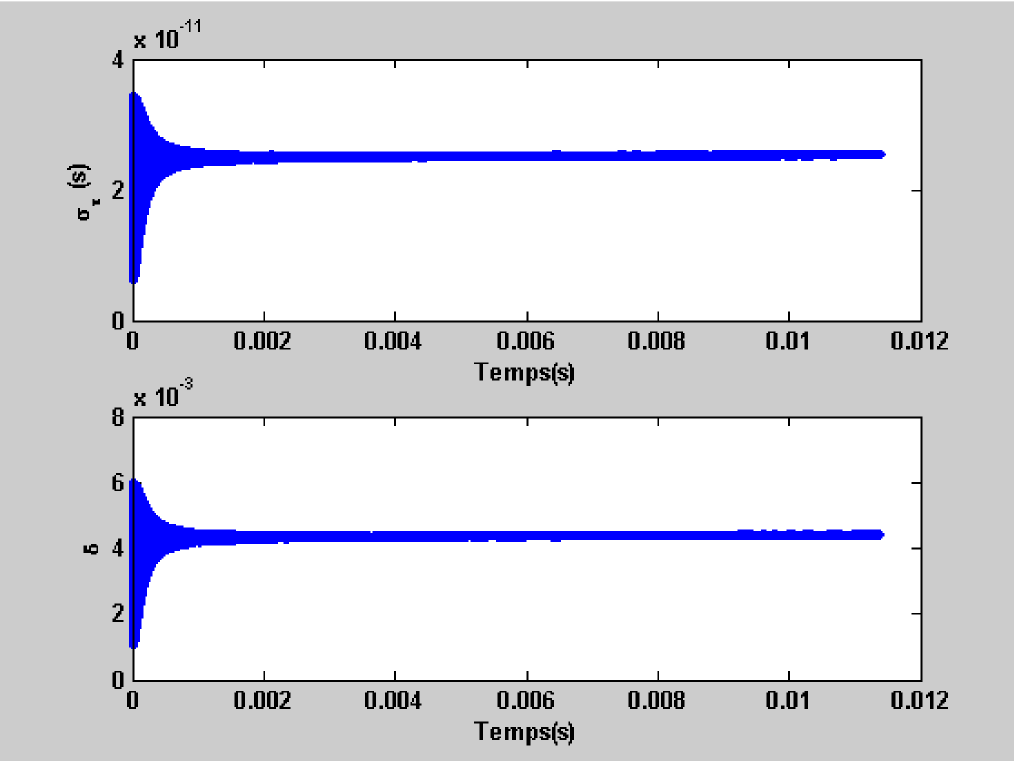


Figure 3.18 Longueur du paquet (en haut) et la dispersion en énergie (en bas)

La figure 3.17. représente le flux en fonction du temps. Avec ces paramètres on peut avoir un flux de l'ordre de 3.9 10^{11}photons/s. Sur la figure 3.18, on peut voir la longueur du paquet et sa dispersion en énergie. Au bout de 12 *ms* la longueur du paquet est d'environ 25 *ps* et sa dispersion en énergie est de 0.4%. Comparé aux résultats précédents, même si le flux est moins important, avec ces nouveaux paramètres le paquet s'allonge moins et la dispersion en énergie est moins élevée.

Grâce à cette étude, nous avons fixé un ensemble de paramètres optimums qui permettent d'avoir un flux important de l'ordre de 10^{13} *photons/s*. Cependant, même si le flux produit est important, il faut prendre en compte l'allongement du paquet et la vitesse de décroissance du flux dans le temps ainsi que les oscillations observées. Il faut bien fixer les besoins des applications médicales pour pouvoir faire un compromis entre ces critères et choisir les paramètres de fonctionnement de l'anneau médical.

II. Deuxième Partie : Le système optique

Introduction

Devant les inconvénients présentés par les lasers industriels en termes de puissance et ceux des lasers pulsés multi- étage de forte puissance en termes de coûts et d'encombrement et de faible fréquence de répétition, l'idée d'amplifier la puissance d'un laser de moindre énergie au moyen d'une cavité Fabry Pérot de haute finesse a été proposée.

Notre R&D consiste à amplifier la puissance d'un faisceau laser à blocage de mode passif (Mode-Locked laser [51]) dans une cavité Fabry Pérot haute finesse pour atteindre un gain allant de 10^4 à 10^5 [52]. Actuellement, des gains de l'ordre de 9000 sont obtenus avec un laser continu et des gains de l'ordre de 1000 en mode pulsé. Il s'agit donc de gagner un à deux ordres de grandeur en régime pulsé et d'optimiser le couplage laser/cavité.
Une telle cavité permettrait d'augmenter la section efficace de l'interaction Compton une fois la cavité placée autour de faisceau d'électrons [53][71].
La réalisation de ce projet d'une cavité Fabry Pérot en régime pulsé à des finesses aussi élevées est très ambitieuse et nécessite des conditions de stabilisation mécaniques et électroniques drastiques. Donc la validation du projet a été divisée en deux étapes afin de résoudre les problèmes séquentiellement. Dans un premier temps, on procède à la réalisation et l'asservissement d'une cavité FP de type confocale qui présente plus de stabilité qu'une cavité concentrique à deux miroirs, cette configuration est utilisée afin de mettre en place une procédure d'asservissement complexe ; des miroirs de très grande qualité sont utilisés pour atteindre des finesses de 30000 et 300000. Dans un deuxième temps, pour les applications sur un accélérateur, il nous faut réduire la taille du faisceau au point d'interaction. Pour cela un résonateur plus complexe est considéré. Deux cas de figures se présentent : une cavité concentrique mécaniquement instable ou une cavité à quatre miroirs qui présente non seulement l'avantage d'être très stable mais aussi, elle permet d'avoir un waist de l'ordre de 20 micromètre. Dans ce qui suit on décrira le travail réalisé sur les deux expériences, dans un premier temps nous donnerons une description de la cavité Fabry pérot à deux miroirs et son système d'asservissement (mon travail étant axé sur le développement du système à quatre miroirs, la description du système d'asservissement de la cavité à deux miroirs sera brève et très générale). Dans un second temps on s'intéressera plus en détail à la cavité à quatre miroirs.

Chapitre 1. La cavité Fabry Pérot à deux miroirs

En optique, une cavité (appelée aussi résonateur) est un milieu dans lequel peut se propager une onde électromagnétique, limité par des discontinuités de l'espace. Sur ces discontinuités, l'onde est partiellement réfléchie et transmise. Une onde interférera donc avec elle-même, de manière constructive ou destructive, en fonction de ses caractéristiques (longueur d'onde, direction, amplitude, propriétés de la cavité ...).
Dans ce chapitre, on introduira la notion de la cavité Fabry Pérot et les différentes géométries possibles puis on discutera des difficultés liées à la réalisation de ce genre de résonateur optique enfin on parlera du dispositif expérimental et du système d'asservissement.

1. Principe d’une cavité Fabry Pérot

Dans sa configuration la plus simple, une cavité Fabry Pérot consiste en deux miroirs sphériques situés l'un en face de l’autre. Lorsqu’une onde plane arrive en phase avec l’onde plane circulant déjà dans la cavité, l’interférence des deux ondes est constructive et la puissance stockée dans la cavité augmente. C’est le phénomène de résonance, puisque le déphasage d’une onde plane après un aller retour dans la cavité est égal à $k \times 2L$, avec L la distance entre les deux miroirs et k le vecteur d’onde, la condition de résonance est traduite par :

$$\lambda = \frac{2L}{q} \Leftrightarrow \nu = q\frac{c}{2L} \qquad \text{(I.1.1)}$$

Avec $q \in \mathbb{N}^{*+}$, $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ et $\nu = \frac{kc}{2\pi}$ sont respectivement la longueur d’onde et la fréquence du laser.

1.1. Les modes de la cavité Fabry Pérot

Un faisceau qui est un mode propre d'un résonateur se reproduira à l'identique après un aller-retour dans celui-ci.
Un mode propre de la cavité est donc nécessairement un mode dont le rayon de courbure complexe (voir l'annexe 3) est invariant par propagation sur un tour de cavité. Les équations présentées dans cette partie peuvent être trouvées dans plusieurs références (par exemple [82]).

1.1.1. Le mode fondamental :

La résolution de l’équation d’onde paraxiale pour une cavité Fabry Pérot montre que le mode fondamental est de la forme :

$$\vec{E}(x,y,z) = \vec{E_0}\frac{\omega_0}{\omega(z)}\, e^{-i(kz-\Phi)}\, e^{-\left(x^2+y^2\right)\left(\frac{1}{\omega^2(z)}+\frac{ik}{2R}\right)} \qquad \text{(I.1.2)}$$

Où $\Phi = \arctan(\frac{\lambda z}{\pi\omega_0^2})$ est la phase de Gouy pour le mode fondamental.

Le mode fondamental est le mode qui présente les plus faibles pertes dans le résonateur. C’est pourquoi, pour obtenir la meilleure densité de puissance, il est important de faire résonner le faisceau laser dans ce mode.

1.1.2. Les modes d'ordres supérieurs :

La solution gaussienne n'est qu'une solution d'ordre zéro de l'équation de propagation, il existe des solutions d'ordres supérieurs. En effet, la solution gaussienne appartient à une des deux bases de solutions de l'équation de propagation, les modes supérieurs rectangulaires et les modes supérieurs cylindriques.

Les modes supérieurs rectangulaires, ou modes d'Hermite Gauss, sont obtenus pour une fonction d'onde de la forme :

$$\Psi(x,y,z) = g\left(\frac{x}{\omega}\right)h\left(\frac{y}{\omega}\right)e^{-iP(z)}e^{-i\frac{k}{2q(z)}\left(x^2+y^2\right)} \qquad \text{(I.1.3)}$$

En introduisant l'expression de $\Psi(x,y,z)$ dans l'équation d'onde, on en déduit que les fonctions de g et h sont des polynômes d'Hermite. Les solutions prennent alors la forme d'équations Hermite Gauss et les modes sont dits Hermitiens :

$$E_{mn}(x,y,z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{1}{2^{m+n}}\frac{1}{m!n!}}\frac{1}{\omega(z)}H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega(z)}\right)H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{\omega(z)}\right)e^{-i\left(kz-\Phi_{mn}(z)\right)}e^{-i\frac{k}{2q(z)}\left(x^2+y^2\right)} \qquad \text{(I.1.4)}$$

Les paramètres $\omega(z)$ et $R(z)$ sont communs à tous les modes, tandis que le déphasage et la structure transverse du faisceau sont différents.

La phase de Gouy dans ce cas est donnée par l'expression :

$$\Phi(z) = (m+n+1)\arctan\left(\frac{\lambda z}{\pi\omega_0^2}\right) \qquad \text{(I.1.5)}$$

Et les polynômes d'Hermite H_n sont définis par :

$$H_n(X) = (-1)^n e^{X^2}\frac{\partial^n}{\partial X^n}e^{-X^2} \qquad \text{(I.1.6)}$$

Le mode fondamental est obtenu pour $m = n = 0$ et les modes supérieurs d'ordres 1 et 2 s'écrivent :

$$E_{10}(x,y,z) = \frac{2x}{\omega(z)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\omega(z)}e^{-i\left(kz-\Phi(z)\right)}e^{-i\frac{k}{2q(z)}\left(x^2+y^2\right)} \qquad \text{(I.1.7)}$$

$$E_{20}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{4x^2}{\omega^2(z)}-1\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\omega(z)}e^{-i\left(kz-\Phi(z)\right)}e^{-i\frac{k}{2q(z)}\left(x^2+y^2\right)} \qquad \text{(I.1.8)}$$

La seconde base de solutions de l'équation d'onde paraxiale est formée par les modes dits de Laguerre Gauss, exprimés en coordonnées cylindriques. Les polynômes d'Hermite sont remplacés par des polynômes de Laguerre L_{mp} où p est l'indice radial et m l'indice azimutal.

Les modes transverses d'ordres supérieurs apparaissent lorsque la cavité optique et le faisceau laser sont désalignés (cf. annexe 4).

1.2. Champs électromagnétiques dans une cavité résonante :

Considérons une onde plane monochromatique incidente sur un des miroirs d'une cavité Fabry Pérot selon figure 1.1. Le champ électrique de l'onde peut être écrit sous la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - kz)} \tag{I.1.9}$$

Les amplitudes a_i et b_i des champs incidents et réfléchis des deux cotés des miroirs figure 1.1., peuvent être écrits sous la forme :

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & it \\ it & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{I.1.10}$$

r et t sont les coefficients de réflexion et de transmission des miroirs respectivement.

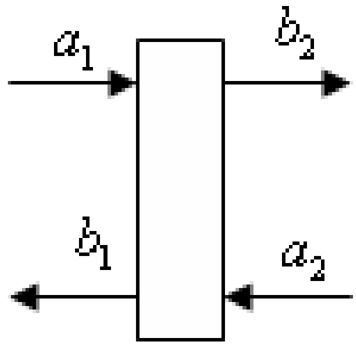


Figure 1.1. Amplitudes des champs incidents et réfléchis sur un miroir.

En désignant par P les pertes par absorption et par diffusion et en posant $R = r^2$ et $T = t^2$,
La condition de conservation de l'énergie se traduit par :

$$R + T + P = 1 \tag{I.1.11}$$

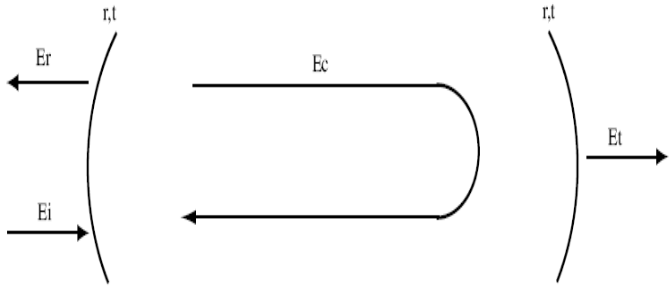


Figure 1.2. Champs circulant dans une cavité.

On notera par :

- L la longueur de la cavité.
- E_i , E_r , E_c et E_t les champs incident, réfléchi, intra cavité et transmis (figure 1.2).

Ces champs sont reliés par les expressions suivantes :

$$E_r = r_1 E_i + ir_2 t_1 E_c e^{-2ikL} e^{-2\mu L} \tag{I.1.12}$$

$$E_c = i t_1 E_i + r_1 r_2 E_c e^{-2ikL} e^{-2\mu L} \tag{I.1.13}$$

$$E_t = i t_2 E_c e^{-ikL} e^{-2\mu L} \tag{I.1.14}$$

Le paramètre μ est le coefficient d'absorption du milieu intra cavité. Dans le cas qui nous intéresse le milieu intra cavité est le vide, donc les pertes peuvent être négligées ($\mu = 0$), et nous supposerons que les propriétés optiques des deux miroirs de la cavité sont identiques, soit $r_1 = r_2$ et $t_1 = t_2$.

Onde intra cavité :

Compte tenu des hypothèses et des équations précédentes, le champ circulant dans la cavité peut être écrit sous la forme :

$$E_c = \frac{it}{1 - g_{ar}(\nu)} E_i \tag{I.1.15}$$

$g_{ar}(\nu)$ est le gain en amplitude de l'onde sur un aller retour dans la cavité, il est défini par :

$$g_{ar}(\nu) = r^2 e^{-\frac{4i\pi\nu L}{c}} \tag{I.1.16}$$

Le gain en intensité de la cavité est définit par :

$$G(\nu) = \frac{I_{cir}}{I_{inc}} = \frac{T}{(1-R)^2} \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\frac{2\pi\nu L}{c}\right)} \tag{I.1.17}$$

Lorsque les interférences sont constructives la condition de résonance est vérifiée, c'est-à-dire que la fréquence vérifie la relation :

$$\nu_0 = n \frac{c}{2L} \quad \text{Avec n entier} \tag{I.1.18}$$

Le gain $G(\nu)$ est maximum.

En combinant ces équations on trouve l'expression du champ réfléchi et du champ transmis par la cavité en fonction du champ incident :

$$E_r = \left(\frac{r - r\left(r^2 + T\right)e^{-2ikL}}{1 - r^2\, e^{-2ikL}} \right) E_i \tag{I.1.19}$$

Le champ transmis par la cavité est donné par :

$$E_t = tE_c \tag{I.1.20}$$

On définit une quantité importante qui caractérise un résonateur :

$$F = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} \tag{I.1.21}$$

La finesse F d'un résonateur, est une mesure du nombre moyen d'allers-retours qu'effectue l'onde dans la cavité avant de sortir. Elle est reliée aux pertes d'intensité par tour de cavité donc aux propriétés des miroirs : Plus les miroirs sont de bonne qualité plus la finesse est élevée.

1.3 Cavité Fabry Pérot concentrique et cavité confocale

La condition de fonctionnement d'une cavité laser est l'alignement du faisceau laser sur l'axe optique (ligne joignant les deux centres de courbures des miroirs sphériques). Une cavité confocale diffère d'une cavité concentrique de par le rayon de courbure des miroirs les composants ainsi que par la position des centres des miroirs. Dans le cas d'une cavité confocale, la distance entre les deux miroirs est égale au rayon des miroirs, ce rayon de courbure étant important, il procure à la cavité une plus grande stabilité, dans le cas d'un désalignement des deux miroirs, le faisceau sera moins dévié (cf. figure 1.3.).

Cependant, dans le cas d'une cavité concentrique, la distance entre les deux miroirs est égale à la somme des deux rayons. Autrement dit, le rayon de courbure des miroirs est égal à la moitié de la distance entre les deux miroirs. Dans ce cas le moindre désalignement des deux miroirs se traduit par un grand déplacement de l'axe optique qui fait sortir le faisceau de la cavité (cf. figure 1.4.).

Face à ces contraintes de stabilité, par la suite une cavité à quatre miroirs est utilisée. En effet, comme démontré dans la partie théorique de Chapitre 2 cette configuration est de loin la plus stable. Cependant, une cavité à deux miroirs sphériques en configuration confocale a été choisie pour le développement et la mise en place du système d'asservissement entre le faisceau laser et la cavité optique.

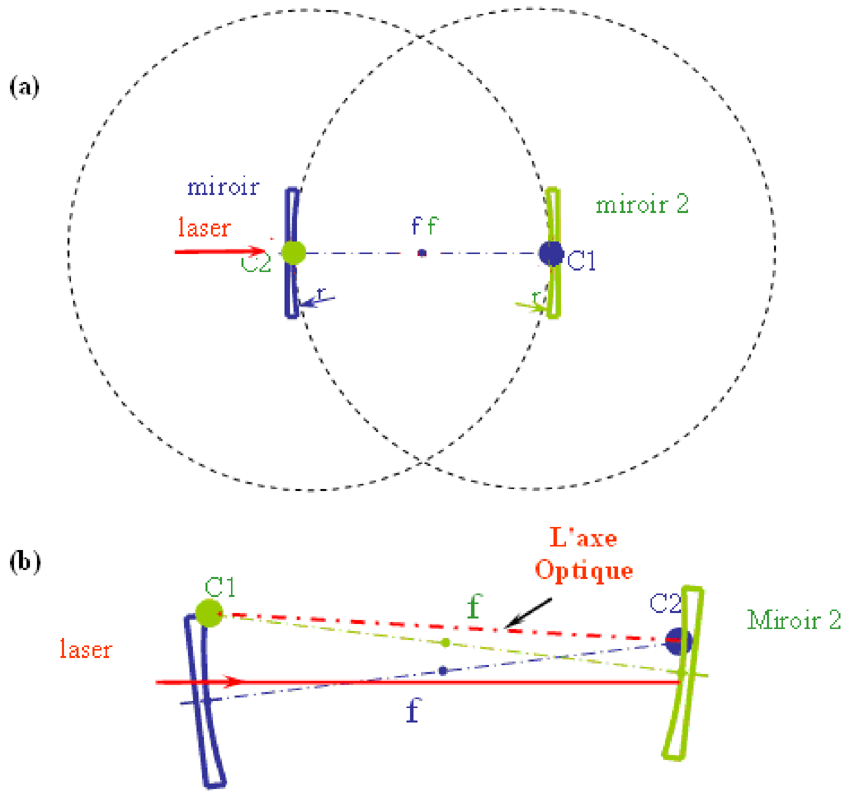


Figure 1.3. Schéma d'une cavité à géométrie confocale (a) alignée (b) désalignée. Le plan focal est situé à une distance R/2 des miroirs .R est le rayon de courbure des miroirs. C1 et C2 sont les centres de courbures des miroirs 1 et 2 respectivement.

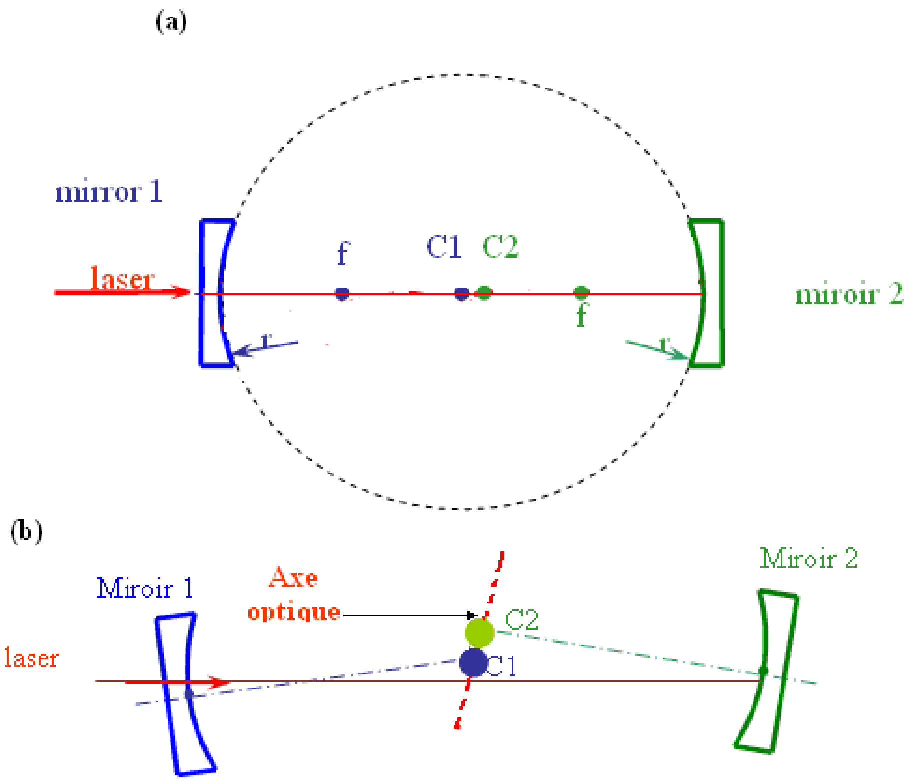


Figure 1.4. Cavité à géométrie concentrique (a) alignée (b) désalignée.

2. Le dispositif expérimental

La géométrie adaptée dans un premier temps est une géométrie confocale. Afin de garantir la stabilité de cette cavité, il faut s'affranchir de tout ce qui pourrait empêcher le faisceau et l'axe optique d'être alignés (dilatations, vibrations, ...). Le dispositif expérimental est représenté sur la figure 1.5. et une vue d'ensemble de la table optique est représentée sur la figure 1.6.

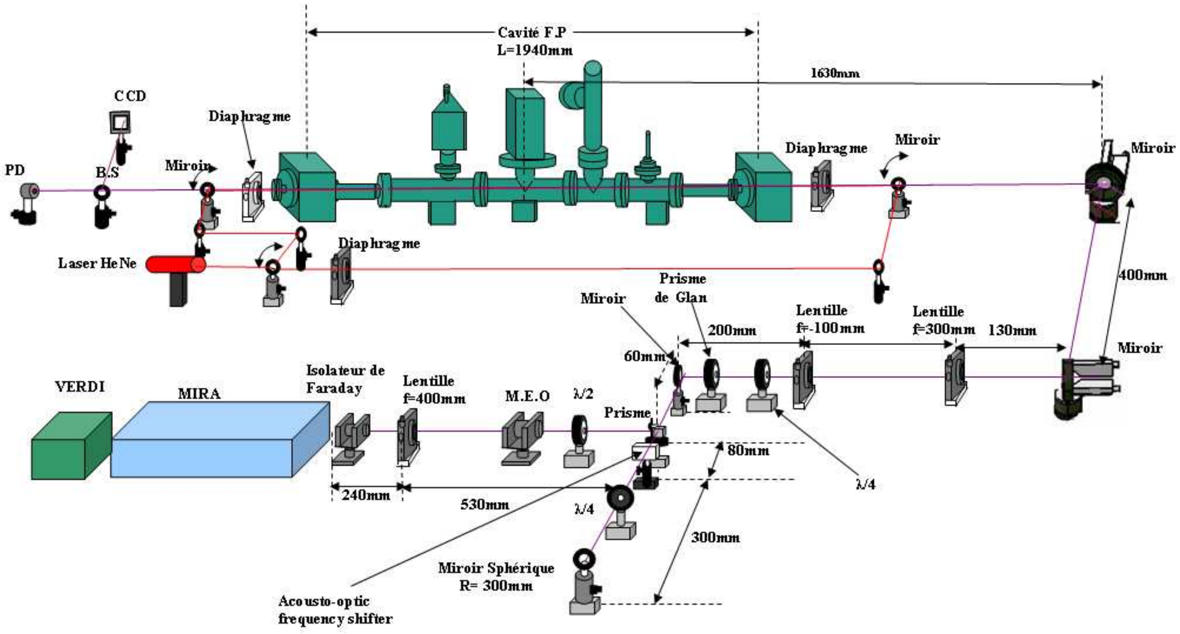
Les éléments optiques du dispositif et le laser sont répartis sur une table optique de 3.5*m* montée sur des coussins d'air afin de filtrer au maximum les vibrations provenant du sol.

La table optique est placée sous un flux laminaire pour s'affranchir de la contamination des éléments optiques par d'éventuelles poussières qui viendraient s'y déposer. On doit disposer des éléments optiques qui permettent de réaliser les fonctions suivantes :

- Pour la source de positrons polarisée il faut que le faisceau laser soit polarisé circulairement. Il faut donc créer une polarisation circulaire du faisceau laser.
- Transport du faisceau laser et couplage du faisceau/cavité.
- Alignement géométrique du faisceau laser et de la cavité.
- Extraction du faisceau de la cavité pour la construction du signal d'erreur pour l'asservissement et les diagnostiques du faisceau.
- Mesure de la polarisation du faisceau laser.
- Isoler le laser.

On peut distinguer sur la table optique les éléments suivants :

1. un isolateur de Faraday qui assure que les faisceaux réfléchis sur les optiques ne rentrent pas dans la cavité du laser,
2. des lentilles de focales f_1 =400*mm* f_2 =-100*mm* et f_3 =300*mm* qui permettent de focaliser le faisceau et de le coupler à la cavité,
3. un modulateur électro-optique pour moduler la phase du faisceau laser,
4. une lame demionde, deux lames quart d'ondes, prisme de Glan pour réaliser une polarisation circulaire du faisceau,
5. prisme, séparatrice de faisceau pour diviser le faisceau au besoin de rallonger le chemin optique ou d'extraire le faisceau pour le diagnostique,
6. des miroirs plans pour le transport et l'alignement du faisceau sur la cavité,
7. un miroir sphérique de rayon de courbure *R*=300*mm* pour réfléchir et focaliser le faisceau. Ce miroir sert pour réfléchir le faisceau sur un acousto-optique frequency shifter,
8. deux diaphragmes de chaque coté de la cavité pour aligner les miroirs de la cavité,
9. modulateur électro-optique,
10. un laser HeNe pour l'alignement des miroirs de la cavité,
11. la cavité Fabry Pérot.



PD : photodiode
BS : lame séparatrice
M.E.O : modulateur électro-optique
FP : Fabry Pérot

Figure 1.5. Schéma du dispositif expérimental de la cavité à deux miroirs.

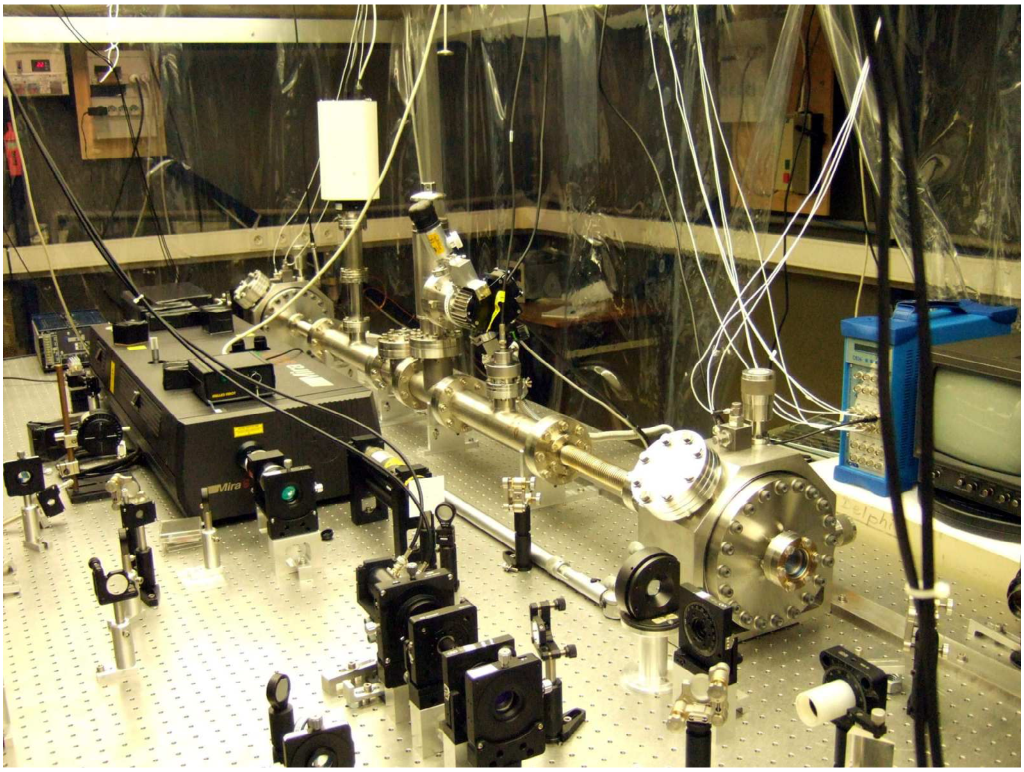


Figure 1.6. Vue d'ensemble de la table optique on distingue le boitier du laser à gauche et la cavité confocale à droite.

2.1. Le laser

Le laser utilisé est un oscillateur Titane Saphir, MIRA de Coherent's, c'est un laser à blocage de modes passif avec une longueur d'onde (λ=800 *nm*) une fréquence de répétition des pulses de 76 *MHz*. Le MIRA est pompé avec un laser continu, VERDI de Coherent's, qui est un laser vert (λ=532 *nm*) continu ultra stable de 6*W*.

Les lasers à blocage de modes délivrent des pulses très brefs de l'ordre de la picoseconde [73]. Une représentation schématique des pulses est portée sur la figure 1.7.

- La durée *FWHM* (Full width at half maximum) du pulse est noté par τ.
- L'intervalle de temps entre deux pulses est noté par T et la fréquence du pulse par $f_{rep}= 1/T$=76*MHz*.
- un déphasage $\Delta\Phi$ entre l'enveloppe et les champs électrique de pulse à pulse est induit par les matériaux dispersifs dans le laser : les indices optiques du cristal Titane Saphir, des prismes et des revêtements des miroirs sont fonction de la longueur d'onde. On peut montrer [82] que la dispersion conduit à un décalage entre la vitesse de phase et la vitesse de groupe, c'est-à-dire $\Delta\Phi\neq 0$. En plus, $\Delta\Phi$ varie avec la température la pression et la puissance du faisceau de pompage [83][84]. Ce dernier effet est la source dominante des variations. Un couplage non linéaire du troisième ordre, à l'intérieur du cristal TiSa conduit à indice optique non linéaire qui est proportionnel à l'intensité du faisceau. Un changement des propriétés de réfraction conduit à un changement du chemin optique dans le milieu dispersif et par conséquent à une variation de $\Delta\Phi$, c'est l'effet Kerr optique.

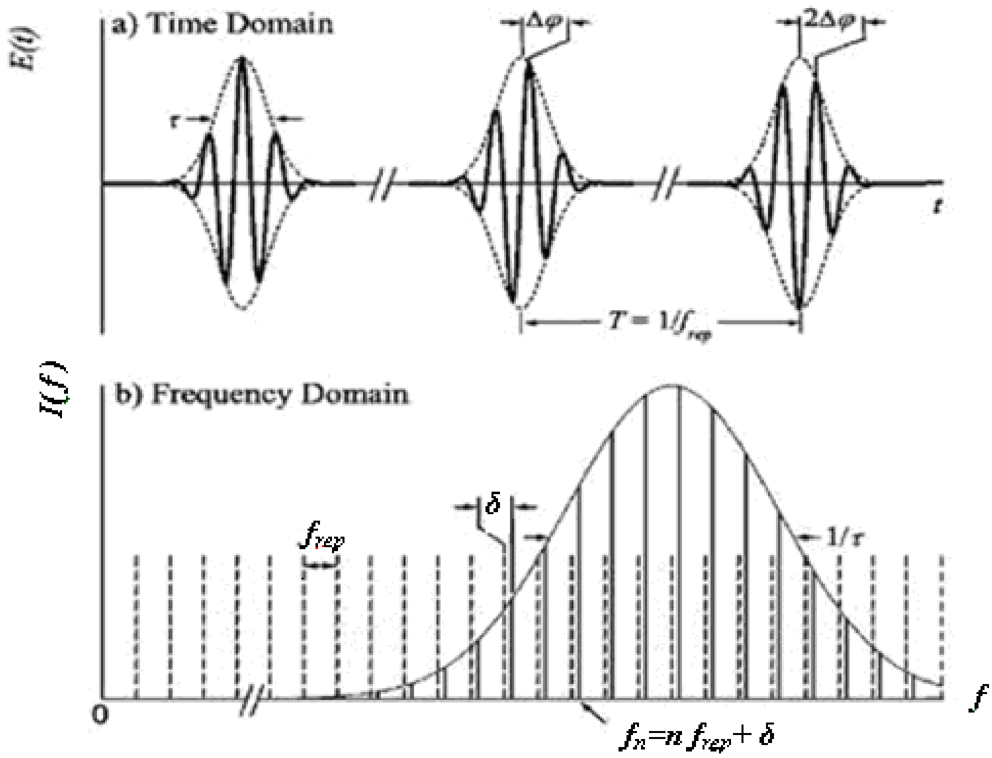


Figure 1.7. Représentation des pulses d'un laser pulsé dans le domaine temporel et fréquentiel.

Le système d'asservissement aura pour but de corriger ce déphasage temporel pour que le système reste en résonnance.

2.1.1. La cavité optique :

Comme nous l'avons déjà mentionné, la réalisation d'une cavité stable est loin d'être facile. En effet, la conception mécanique de la cavité est soumise à des contraintes drastiques car la stabilité mécanique va jouer un rôle fondamental dans le cas d'une cavité Fabry Pérot à deux miroirs, sans quoi il est impossible de réaliser de petits waists.

Le problème majeur est que la cavité concentrique est très instable, à titre d'exemple, pour une cavité de $2m$ un waist de 130µm peut être obtenu avec une séparation de $1cm$ des deux centres de courbure des deux miroirs. Ceci va impliquer une tolérance de moins de $10\mu m$ en inclinaison des miroirs (pour cet ordre l'axe optique est hors de la cavité). Si l'on vise des waists plus petits les contraintes sur la stabilité vont être énormes. Par conséquent, nous avons choisi une configuration confocale qui présente plus de stabilité. En plus de cela, plusieurs précautions ont été prises pour réduire au maximum le bruit environnemental et pour la stabilisation de la table optique. Les miroirs de la cavité sont montés sur des supports séparés permettant un réglage indépendant des distances.

Par ailleurs, pour pallier ces problèmes d'instabilités un nouveau système de support miroir a été développé. Le principe de ces supports est basé sur un système de cardan monobloc qui permet des rotations autours du centre géométrique des miroirs. Par ailleurs il est essentiel que le système soit mis sous vide, d'une part pour éviter de polluer les miroirs à haut coefficient de réflexion et d'autre part pour l'isolé des vibrations acoustiques. Pour ce faire, un tube cylindrique est placé sur la longueur de la cavité, figure 1.8. Le réglage des miroirs se fait de l'extérieur grâce à des boutons micrométriques très sensibles. Sur le tube, il y a des sorties qui permettent la connexion en permanence avec la pompe à vide.

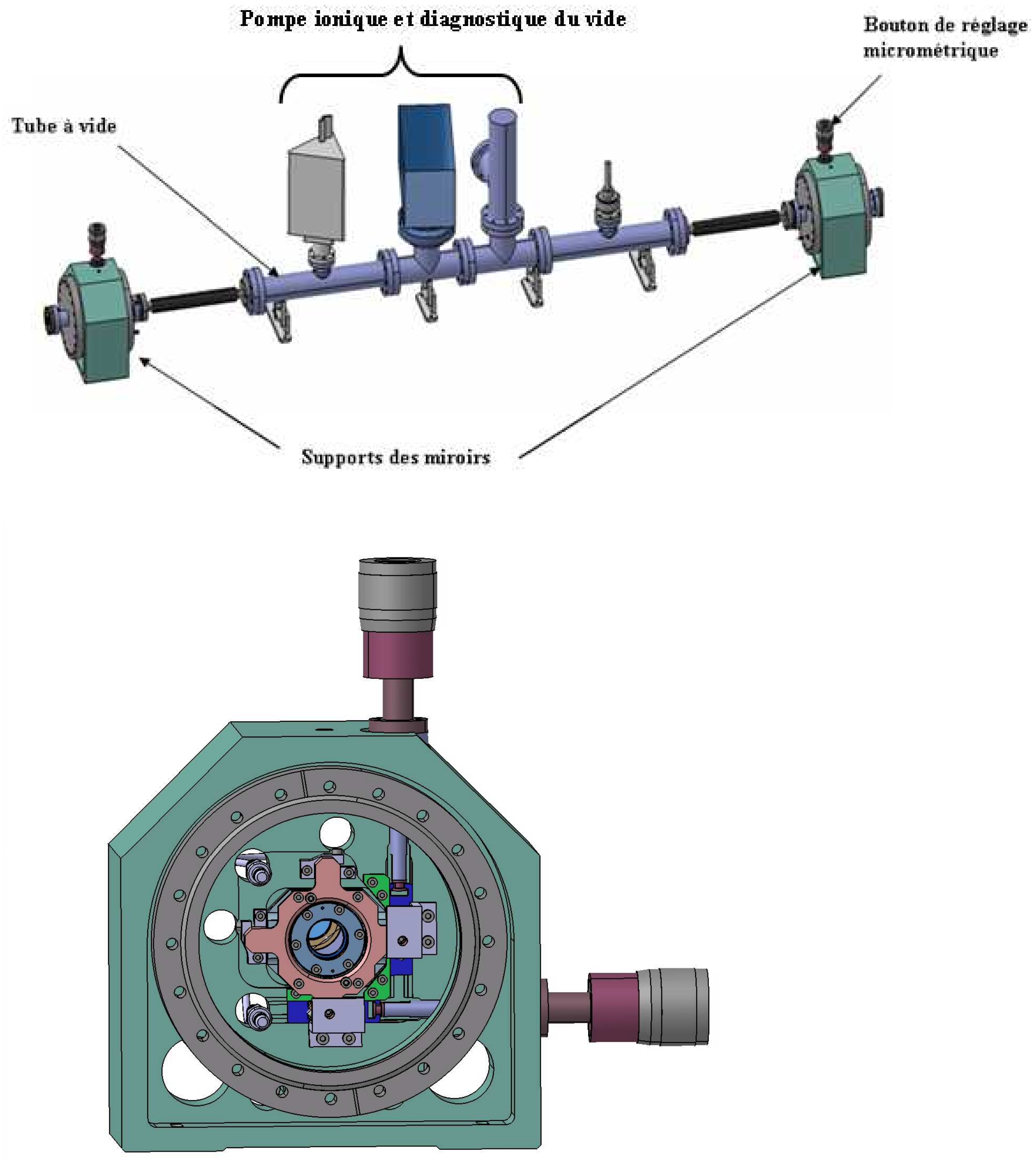


Figure 1.8. Représentation schématique de la cavité et du support miroir.

2.2. L'asservissement de la cavité

Un des problèmes auxquels on est confronté pour la réalisation de la cavité Fabry Pérot est d'arriver à accorder la fréquence de répétition du faisceau laser à celle de la cavité Fabry Pérot. Ceci revient à égaler la longueur de la cavité Fabry Pérot à celle du laser. Lorsque cette condition est remplie, les pulses peuvent se recouvrir et tous les modes du laser sont aussi résonnants dans la cavité Fabry Pérot. Ce travail est réalisé à l'aide du module piézo-électrique du laser ainsi que d'une platine de translation pour les réglages grossiers.
Afin d'effectuer des ajustements en temps réel, une chaîne d'asservissement est mise en place en utilisant la méthode usuelle dite de "Pound-Drever Hall"[71] [72].
Le but de cette technique est d'ajuster automatiquement la longueur de la cavité laser jusqu'à être à la résonance et de garder ce réglage. Le circuit de "feedback", figure 1.9 doit compenser toute perturbation qui tendrait à faire sortir le système hors de la résonance. Pour ce faire, on envoie le faisceau sortant du laser Titane saphir sur une cellule électro-optique (M.E.O.) pour en moduler la phase. La faisceau réfléchi sur la cavité Fabry Pérot est alors envoyé sur une photodiode. Il est ensuite comparé avec le signal démodulé par l'oscillateur local (O.L.). Lorsque l'on se trouve au-dessus de la résonance, augmenter la fréquence du laser augmentera la puissance réfléchie. En dessous de la résonance, augmenter la fréquence du laser diminuera la puissance réfléchie. En modulant le système, il est ainsi possible de dire de quel côté de la résonance on se trouve en regardant comment varie la puissance réfléchie en fonction de la phase et ainsi d'agir en conséquence.
La comparaison est effectuée à l'aide du mixeur qui effectue le produit des deux signaux d'entrée. Le signe du signal de sortie du mixeur est différent selon le côté de la résonance où l'on se trouve, et vaut 0 lorsqu'on se situe exactement à la résonance. En théorie du contrôle, le signal de "feedback" est appelé signal d'erreur et désigne l'écart de fréquence entre la fréquence du laser et la fréquence de résonance de la cavité ($\delta f = f_0 - f_{rep}$). La figure 1.11. en montre la forme usuelle. Pour de petits décalages, on se situe dans une zone où un asservissement linéaire est possible.
En envoyant enfin le signal d'erreur, après filtrage, sur les actuateurs jouant sur la longueur de la cavité laser (piézo électrique, platine de translation) on complète la boucle d'asservissement et on bloque ainsi le système à la résonance (figure 1.12.).

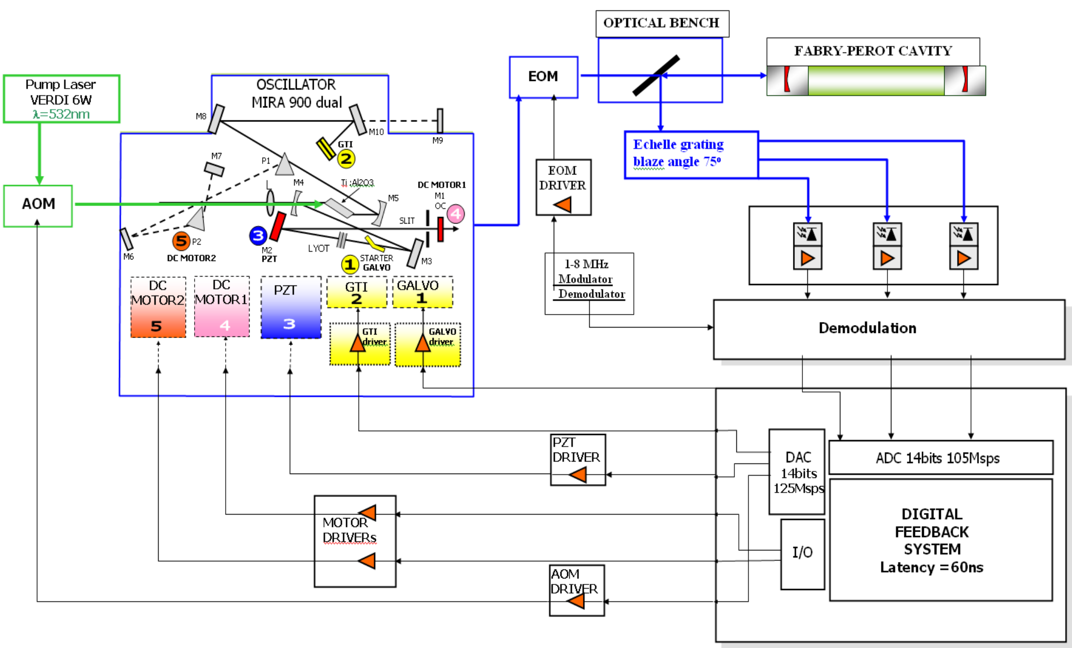


Figure 1.9. Schéma du système d'asservissement.

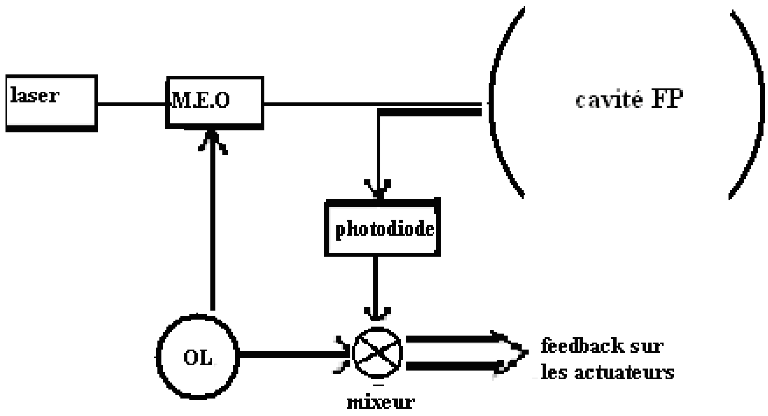


Figure 1.10. Schéma de la chaîne d'asservissement utilisant la technique de Pound Driver Hall.

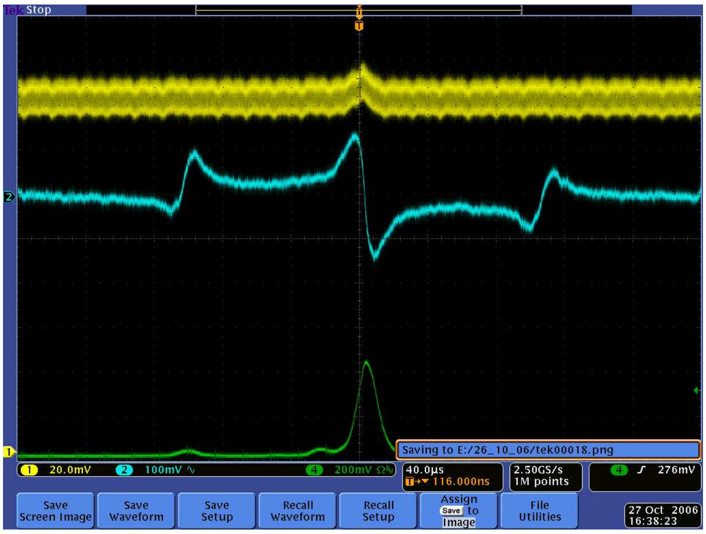


Figure 1.11 Exemple de signal d'erreur obtenu par la technique de Pound Driver Hall.

Le signal d'erreur (en bleu).

Le signal transmis par la cavité (en vert).

Le signal jaune ne nous intéresse pas

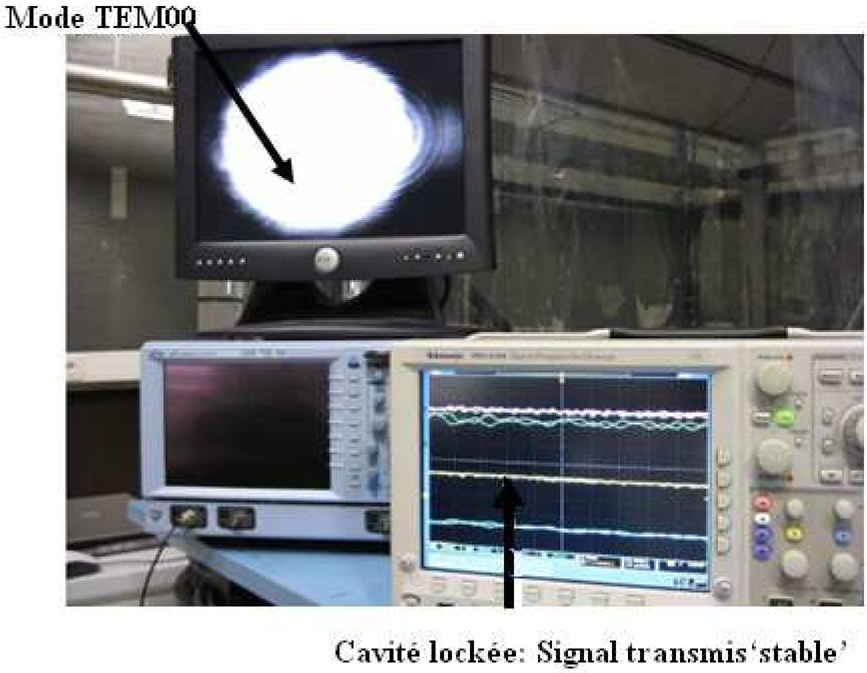


Figure 1.12. Cavité asservie sur le mode fondamentale. On observe sur l'écran le mode fondamental mesuré par une CCD placée en sortie de la cavité.

Le laser a été asservi sur la cavité Fabry Pérot en fréquence. Une finesse de 3600, ce qui correspond à un gain en puissance de ~1200, a été atteinte. La fréquence du laser et de la cavité ont été accordées à une valeur $\Delta f_{rep}/f_{rep}=10^{-10}$ ($\Delta f_{rep}=30mHz$ pour $f_{rep}=75MHz$).
Sur la figure 1.12. on peut voir sur l'oscilloscope le signal transmis par la cavité une fois asservie sur le mode fondamental et sur l'écran le mode fondamental mesuré par une CCD placée après la cavité.
Au moment de la rédaction de cette thèse, des miroirs de très haute finesse (F=30 000) ont été montés et un système d'asservissement est en train d'être mis en place.

3. Couplage du laser à la cavité

Nous avons présenté de manière très générale plus haut les différents éléments qui composent le dispositif expérimental, en donnant l'utilité de chaque élément. Dès que la fréquence du laser était égale à la fréquence de résonance de la cavité, la cavité atteignait un régime d'équilibre avec un gain maximum. Nous avons ensuite décrit le système d'asservissement de la fréquence du laser sur celle de la cavité et de blocage du système sur le mode fondamental de la cavité présentant une puissance maximale.

Afin d'obtenir le gain de puissance souhaité dans la cavité, il faut cependant coupler le faisceau laser incident avec *le mode de résonance fondamental* défini par la cavité optique.
Ceci implique que l'axe du faisceau incident doit être confondu avec l'axe optique de la cavité et que les dimensions transverses du faisceau incident au centre de la cavité soient adaptées à celles définies par la cavité elle-même.

Nous allons à présent décrire la technique employée afin de contrôler la position et la taille du waist du faisceau laser incident sur la cavité. Pour un faisceau gaussien la connaissance de ces paramètres permet de connaître l'évolution de sa taille en tout point du parcours (annexe 3) [82]. On peut ainsi choisir les optiques adéquates pour la focalisation afin

d'adapter la taille du faisceau à la taille définie par la cavité autrement dit à la taille du mode fondamental de la cavité et éviter le couplage avec les modes d'ordres supérieurs.
La cavité impose un waist au faisceau, le problème consiste donc à définir les lentilles et leurs emplacements afin de transporter le waist du faisceau laser au centre de la cavité avec les bonnes dimensions.

3.1. Adaptation du faisceau

Le principe consiste à déterminer les focales des lentilles à disposer sur le trajet du faisceau de manière à ce que la taille du faisceau au plan du waist soit égale au waist définit par la cavité. En connaissant la taille du faisceau à la sortie du laser et celle que l'on désire établir à l'intérieur de la cavité, il faut déterminer les focales des lentilles et leurs emplacements.
Nous rappelons que si d_1 et d_2 sont les distances des plans de focalisation du faisceau à une lentille d'adaptation de focale f et si w_1 et w_2 sont les waist du faisceau selon le Schéma (figure 1.13.) alors on a :

$$w_2 = M w_1 \tag{I.3.1}$$

et

$$d_2 - f = M^2 (d_1 - f) \tag{I.3.2}$$

Où M est la fonction de transfert de la lentille donnée par :

$$M = \frac{|f|}{\sqrt{(d_1 - f)^2 + \left(\frac{\pi w_1^2}{\lambda}\right)^2}} \tag{I.3.3}$$

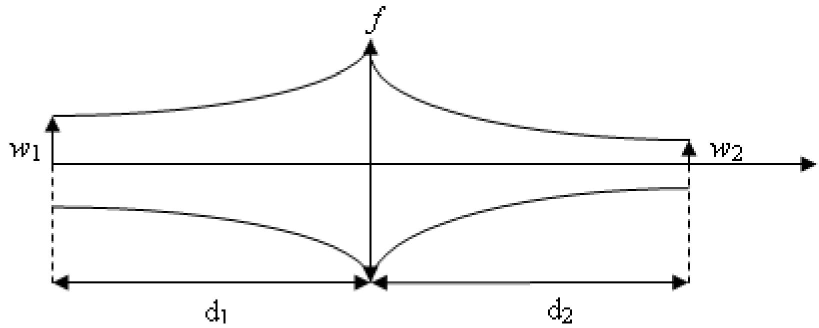


Figure 1.13. Focalisation d'un faisceau gaussien par une lentille.

Pour pouvoir déterminer les lentilles de focalisation, il faut tenir compte de tous les éléments à travers lesquels le faisceau laser passe. L'ensemble de ces considérations a imposé un système d'adaptation composé de trois lentilles. Elles sont disposées sur la ligne du faisceau selon la figure 1.5. Le faisceau délivré par le laser n'étant pas gaussien, les calculs faits selon les relations précédentes ne sont pas parfaitement adaptés à notre cas. C'est pourquoi, une fois que nous avons obtenu les résultats des calculs, il a fallu optimiser les emplacements avant que le faisceau ne soit adapté à la cavité. Pour coupler le faisceau dans la cavité nous avons utilisé une première lentille de nature convergente d'une focale f=400*mm* et est placée à une distance de 240 *mm* de la sortie du boîtier laser. La seconde lentille divergente d'une focale f =-100*mm* est située à une distance de 1790 *mm* du boîtier laser. Enfin la troisième lentille de focale f =300*mm* est placée à une distance de 2080mm du boîtier laser et 1480 du miroir d'entrée de la cavité. Le miroir de la cavité agit lui-même comme une lentille divergente de focale $f_m = -\frac{R}{n-1}$ dont il faut tenir compte pour le calcul de la distance de focalisation dans la cavité.

Chapitre 2. La cavité Fabry Pérot à quatre miroirs : Partie théorique

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté la cavité Fabry Pérot à deux miroirs. Nous avons ainsi décrit le dispositif expérimental et quelques notions relatives à ce type de résonateur et nous avons introduits la notion de l'asservissement. Dans ce Chapitre, nous allons décrire la deuxième phase du projet, à laquelle j'ai directement participé.

Les domaines d'applications des rayons X produits par interaction Compton entre des faisceaux lasers intenses et des faisceaux d'électrons nécessitent des flux très intenses. Cependant, pour atteindre les flux requis pour ces applications (cf. l'introduction générale), d'énormes contraintes sont imposées au résonateur optique externe. Le waist du faisceau laser à l'intérieur de la cavité doit être de l'ordre d'une dizaine de micromètre et le chemin optique d'un aller retour du résonateur doit être de l'ordre de quelques mètres. Cela exclut l'utilisation d'une simple cavité à deux miroirs puisque ces nombres correspondent à une configuration concentrique instable, comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent. Cela conduit à choisir des cavités à quatre miroirs pliées en tétraèdre, dites cavités en ‘Bow-tie’ ou en Z, qui sont connues pour fournir des conditions de fonctionnement stables, même lorsque le waist du mode de la cavité est de petite taille.

Dans ce chapitre, nous allons prouver numériquement les avantages de ce genre de cavités. Nous allons donc commencer par présenter le calcul des instabilités de polarisation induites par les désalignements des miroirs dans une cavité à quatre miroirs ainsi que les tolérances mécaniques des différentes configurations, puis on présentera la méthode utilisée pour le calcul des modes de résonance de ce genre de cavités. Pour clore la partie théorique on parlera du transport de la polarisation. Chacun de ces calculs est effectué pour deux géométries de cavité à quatre miroirs planaire et non planaire.

Les calculs présentés dans ce chapitre font l'objet d'articles soumis à des revues à comité de lecture.

I. Instabilités de polarisation induite dans une cavité Fabry Pérot externe à quatre miroirs

L'inconvénient de la géométrie à quatre miroirs de la cavité est que le faisceau lumineux qui y circule est réfléchi sous des angles d'incidences non nuls sur les miroirs de la cavité. Les revêtements des miroirs étant constitués d'un empilement de multicouches quarts d'onde [103], nous allons montrer que la polarisation des modes propres de la cavité varie avec de petits désalignements des miroirs de la cavité. Des instabilités de la polarisation des modes propres peuvent alors être induites par les désalignements des miroirs. Comme une variation du couplage de polarisation conduit, à son tour, à une variation de la puissance du faisceau laser stockée à l'intérieur de la cavité, une telle étude doit être effectuée, spécialement pour des cavités haute finesse (qui jusqu'à présent n'ont jamais été étudiées), ceci est l'objectif de cette section.

Jusqu'à présent, des études des instabilités de polarisation des cavités Fabry Pérot ont été consacrées aux couplages non linéaires induits par des matériaux situés à l'intérieur de la cavité [104]. Ici, l'instabilité est due au couplage entre le vecteur de polarisation de la lumière incidente, qui est supposé être fixe, et les modes propres de polarisation de la cavité qui varient à cause des mouvements des miroirs (par exemple, à cause des vibrations ou l'alignement). On va montrer que le paramètre critique de ce problème est la finesse de la cavité et qu'il intervient d'une manière non linéaire.

Dans l'approximation paraxiale, que l'on va supposer tout le long de ce chapitre, on va voir que les états propres de polarisation d'une cavité à quatre miroirs planaire haute finesse sont très sensibles aux mouvements des miroirs. Des configurations non planaires de cavités à quatre miroirs seront introduites dans le but de contourner les instabilités de la polarisation. Ces configurations non planaires n'ont été décrites dans aucune publication et l'une d'elles, la cavité en "tétraèdre", possède des propriétés de stabilité très prometteuses.

Cette partie est structurée comme suit : le formalisme utilisé pour calculer le transport de la polarisation à l'intérieur d'une cavité à quatre miroirs non planaire ainsi que les géométries de cavités planaire et non planaire seront introduits en premier. Puis les résultats numériques seront présentés.

1. Formalisme

Comme le montre la figure 2.1.a,b,c, plusieurs géométries de cavités à quatre miroirs sont considérées : cavité pliée en U, en Z et en “Bow-tie”. Les extensions non planaires de ces géométries sont montrées sur les figure 2.1.d,e et f. Par commodité, un angle relatif ϕ est introduit de sorte que lorsque $\phi=0,\pi$ les géométries des cavités sont planaires et lorsque $\phi=\pi/2$ on obtient le "tétraèdre" et la cavité non planaire en U (une version à six miroirs de ce type de cavité a été étudiée dans [105]) et en Z. dans la figure 2.1. , les miroirs 1 et 2 sont plans et les miroirs 3 et 4 sont sphériques.

Les rayons de courbure des miroirs sphériques sont choisis de façon à minimiser les waists des modes de la cavité pour chaque configuration géométrique. Le plan de référence $\{x,y,z\}$ est aussi représenté sur la figure 2.1. avec les paramètres de longueur L, h et d et l'angle d'incidence θ_0. Pour un souci de simplicité, les géométries des cavités sont construites de telle manière que l'angle d'incidence θ_0 est le même sur tous les miroirs, mais le formalisme décrit ci-dessous reste valable pour toute autre configuration.

Les cavités sont dites parfaitement alignées lorsque les centres géométriques des miroirs sont situés aux points de référence $M_{Ci} = (X_{0i},Y_{0i},Z_{0i})$ avec $i = 1,\dots 4$. Les vecteurs normaux en ces points sont notés par $\mathbf{N_1}$, $\mathbf{N_2}$ et $\mathbf{N_{03}}$, $\mathbf{N_{04}}$ pour les deux miroirs plans et les deux miroirs sphériques. Les indices 03 et 04 indiquent que les vecteurs normaux sont pris au centre géométrique des miroirs 3 et 4 respectivement. Les points d'intersection de l'axe optique avec les surfaces des miroirs sont notés par M_i avec $i = 1,\dots 4$ et $M_i = M_{Ci}$ lorsque la cavité est alignée (cf. figure 2.2.). Les désalignements sont décrits par cinq paramètres par miroir ΔX_i, ΔY_i, ΔZ_i, $\Delta\theta_{xi}$ et $\Delta\theta_{yi}$ de façon à ce que les centres géométriques des miroirs désalignés et leurs normales en ces points s'écrivent :

$$\begin{aligned} M_{Ci} &= \left(X_i, Y_i, Z_i\right) = \left(X_{0i}+\Delta X_i, Y_{0i}+\Delta Y_i, Z_{0i}+\Delta Z_i\right),\ i=1,2,3,4 \\ \mathbf{n_i} &= \Re_x\left(\Delta\theta_{ix}\right)\Re_y\left(\Delta\theta_{iy}\right)\mathbf{N_i},\ i=1,2,03,04 \end{aligned} \qquad \text{(II.1.1)}$$

Où $\Re_j\left(\Delta\theta_{ij}\right)$ est la matrice à 3 dimensions décrivant la rotation d'un angle $\Delta\theta_{ij}$ autour de l'axe j dans $\mathbb{R}^3$. Cette représentation des désalignements angulaires modélise l'action des réglages mécaniques des miroirs.

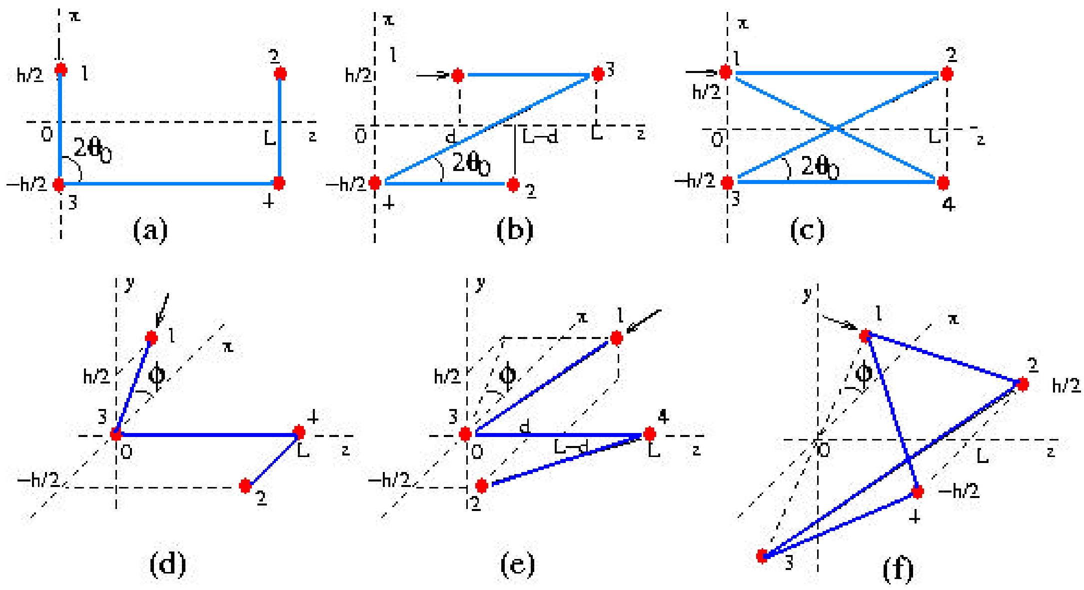


Figure 2.1. Géométries de Cavités : a) planaire en U, b) planaire en Z, c) planaire “bow-tie”, d) non planaire en U, e) non planaire en Z, f) non planaire “bow-tie”. Numéros 1 et 2 indiquent la position des miroirs plans et les numéros 3 et 4 les positions des miroirs sphériques. Les axes de référence *x*, *y*, *z* sont montrés.

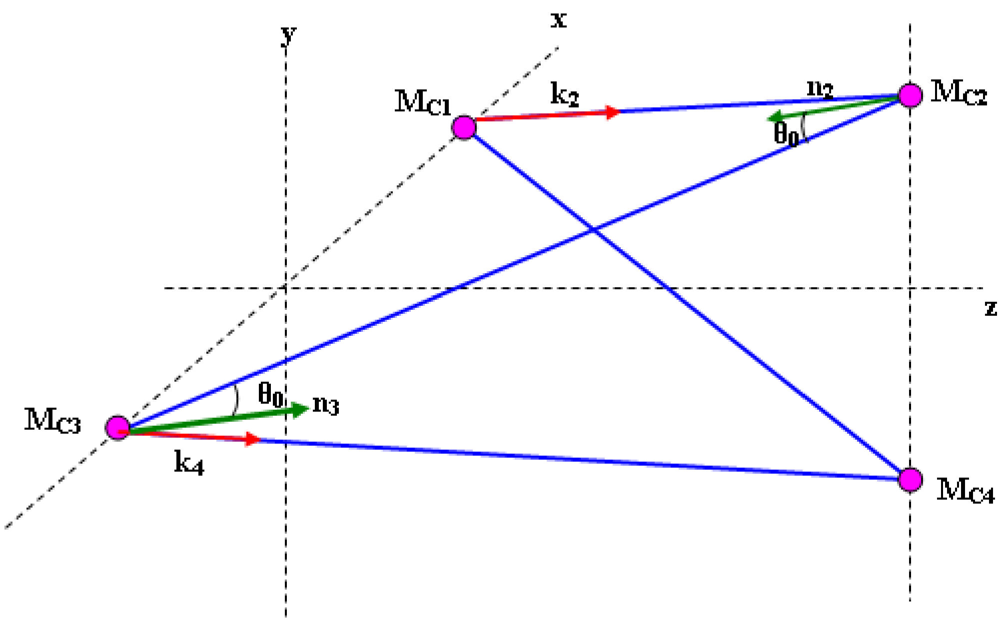


Figure 2.2. Cavité non planaire en tétraèdre avec les vecteurs d'onde et les vecteurs normaux des miroirs 2 et 3. Les points M_{Ci} correspondent aux centres des miroirs.

1.1. Calcul précis de l'axe optique des cavités désalignées

Etant donné un ensemble de paramètres de désalignement ΔX_i, ΔY_i, ΔZ_i, $\Delta\theta_{xi}$ et $\Delta\theta_{yi}$, la méthode la plus populaire utilisée pour déterminer l'axe optique d'une cavité complexe légèrement désalignée est le formalisme étendu de la matrice ABCD[107][82]. Toutefois, nous avons besoin ici de déterminer avec précision l'angle d'incidence sur les miroirs de la cavité afin de calculer de manière appropriée le coefficient de réflexion des revêtements multicouches. Pourtant, nous avons trouvé plus approprié d'utiliser le principe de Fermat [108], qui incarne exactement les formes des miroirs et qui peut être appliqué par itération afin d'atteindre de très hautes précisions numériques.

Pour utiliser le principe de Fermat, on commence par exprimer les équations des surfaces des miroirs désalignés $z = f_i(x,y)$, $i = 1,... 4$. Puis, notant $M_i = (x_i,y_i,z_i)$, de sorte que $z_i = f_i(x_i,y_i)$ avec $i = 1,... 4$, on peut écrire le trajet optique d'un aller-retour :

$$\Lambda = \left\|\overrightarrow{M_2M_1}\right\| + \left\|\overrightarrow{M_3M_2}\right\| + \left\|\overrightarrow{M_4M_3}\right\| + \left\|\overrightarrow{M_1M_4}\right\| \tag{II.1.2}$$

pour des cavités planaires et non planaires en “Bow-tie” et

$$\Lambda = \left\|\overrightarrow{M_3M_1}\right\| + \left\|\overrightarrow{M_4M_3}\right\| + \left\|\overrightarrow{M_2M_4}\right\| + \left\|\overrightarrow{M_5M_4}\right\| + \left\|\overrightarrow{M_6M_5}\right\| + \left\|\overrightarrow{M_1M_6}\right\| \tag{II.1.3}$$

pour des cavités planaires et non planaires en Z et en U.

Les points M_5 et M_6 sont situés sur les miroirs 4 et 3 respectivement, afin de ne pas imposer *M5 = M4* et *M6 = M3 a priori*. En fait, on obtient toujours des solutions auto retraçantes pour des cavités en U ou en Z, c'est-à-dire *M5 = M4* et *M6 = M3*. Mais il convient de noter que l'on peut construire formellement des solutions non auto retraçantes. Ces solutions sont en fait fortement limitées par la géométrie des cavités et pour tous les exemples numériques présentés ci-dessous les solutions auto retraçantes sont toujours plus courtes.

Selon le principe de Fermat, les coordonnées x_i et y_i sont données par le système d'équations $\{\partial\Lambda/\partial x_i = 0, \partial\Lambda/\partial y_i = 0\}_{i=1,..,4}$. Comme ces équations sont non linéaires, un développement au premier ordre en $(X_i - x_i)$, $(Y_i - y_i)$, i =1,… 4 est effectué et le système d'équations linéaires résultant est résolu numériquement (huit équations pour les cavités “bow-tie” et douze pour les cavités en U ou en Z) en utilisant le logiciel Matlab [109]. Une fois les coordonnées inconnues x_i et y_i déterminées, on reconstruit le trajet optique en utilisant les lois de la réflexion sur les miroirs sans aucune approximation à partir de la direction $\overrightarrow{M_3M_4}$. Après un aller-retour, le point d'arrivée sur le miroir 3 est noté par M_3’ et la distance $\left\|\overrightarrow{M_3M_3'}\right\|$ est calculée. Enfin, on substitue $X_i \to x_i$ et $Y_i \to y_i$ dans le but d'itérer la procédure jusqu'à ce que la précision numérique soit atteinte. C'est-à-dire $\left\|\overrightarrow{M_3M_3'}\right\| \lesssim 10^{-12}$ mm.

Nous avons vérifié que cette méthode donne des résultats en accord avec le formalisme de la matrice ABCD. Cependant, pour vérifier précisément nos résultats numériques, nous avons calculé aussi l'axe optique pour une cavité planaire avec des désalignements planaires en utilisant une méthode simple non itérative. Dans un souci de clarté, la méthode est décrite ici uniquement pour la cavité en configuration “Bow-tie”. Cette méthode est basée sur le fait que les réflexions sur les miroirs sont des isosymétries et que deux réflexions successives sont équivalentes au produit d'une rotation de l'espace et d'une translation [110]. Oubliant la translation, les réflexions sur les miroirs 1 et 2 sont équivalentes à une rotation d'un angle α_{12} donné par $\cos\alpha_{12} = \mathbf{n_1}\cdot\mathbf{n_2}/2$ autour de la direction $\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2}$. Comme l'axe optique est restreint à rester dans le plan de la cavité, on peut facilement écrire la condition pour qu'un rayon se reproduise après un aller-retour. Cela conduit à la condition suivante pour la matrice de rotation décrivant les réflexions sur les miroirs 3 et 4 :

$$\mathfrak{R}_{\mathbf{n_3}\times\mathbf{n_4}}(\alpha_{34}) = \mathfrak{R}^{-1}_{\mathbf{n_1}\times\mathbf{n_2}}(\alpha_{12}) \Rightarrow \mathbf{n_3} = -\mathfrak{R}_\perp(\delta\alpha)\mathbf{n_2} \text{ si } \mathbf{n_4} = -\mathfrak{R}_\perp(-\delta\alpha)\mathbf{n_1} \tag{II.1.4}$$

Où $\delta\alpha$ est le seul paramètre indépendant. Comme des points uniques M_3 et M_4 correspondent aux vecteurs normaux $\mathbf{n_3}$ et $\mathbf{n_4}$, $\delta\alpha$ est déterminé numériquement en comparant le point de départ et le point de retour après un aller-retour sur la surface du miroir 3.

En comparant les résultats obtenus avec cette méthode (dans le cas planaire) à la méthode itérative de Fermat, on trouve un parfait accord avec la précision numérique du logiciel Matlab. Il faut mentionner que, comme le produit de deux rotations dans un espace tridimensionnel obéit à l'algèbre de Quaternions complexe, nous n'avons trouvé aucune méthode simple pour étendre cette méthode au cas des configurations non planaires.

1.2. Matrice de Jones d'un aller retour

Nous allons nous concentrer dans un premier temps sur les cas des configurations “bow-tie” et “tétraèdre”. Le calcul de la matrice de Jones d'un aller-retour d'un oscillateur non planaire a été décrit [111]. Pour chaque configuration de désalignements, une fois l'axe optique déterminé, on obtient l'angle d'incidence θ_i sur les quatre miroirs de la cavité. Ces angles d'incidence devraient être différents de l'angle d'incidence nominal θ_0 que nous supposons avoir été utilisés pour définir l'épaisseur des couches de revêtement. Désignons par r_i la matrice de réflexion du miroir i dans la base $\{\mathbf{s_i}, \mathbf{p}_i\}$ attachée au plan d'incidence.

$$r_i = \begin{pmatrix} \rho_{is}\exp(i\varphi_{is}) & \\ & \rho_{ip}\exp(i\varphi_{ip}) \end{pmatrix} \tag{II.1.5}$$

Les paramètres réels ρ_{is}, ρ_{ip}, φ_{is} et φ_{ip} peuvent être déterminés en utilisant le formalisme matriciel de propagation dans les multicouches diélectriques [112]. Les revêtements des miroirs que nous avons considérés ont la structure multicouche suivante : une couche de protection $\lambda/2$ en SiO_2, N doubles couches $\lambda/4$ en Ta_2O_5/SiO_2, une couche Ta_2O_5 $\lambda/4$ et le substrat de silice. A présent, si $\theta_i \neq \theta_0$ on obtient $\varphi_{ip} - \varphi_{is} \neq \pi$, qui veut dire que des ondes p et s vont accumuler une phase différente après un aller-retour, c'est-à-dire qu'elles vont résonner à différentes fréquences bien que la cavité soit faite du même nombre de miroirs (voir par exemple [113] pour le cas extrême d'un nombre impair de miroirs).

De r_i, i = 1,... 4, on obtient la matrice de Jones J en tenant compte du changement de base en allant d'un plan d'incidence à un autre [111] [114] [115] :

$$J = r_1 N_{41} r_4 N_{34} r_3 N_{23} r_2 N_{12} \tag{II.1.6}$$

Avec $\mathbf{N_{i,i+1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{s_i}\cdot\mathbf{s_{i+1}} & \mathbf{p'_i}\cdot\mathbf{s_{i+1}} \\ \mathbf{s_i}\cdot\mathbf{p_{i+1}} & \mathbf{p'_i}\cdot\mathbf{p_{i+1}} \end{pmatrix}$

Et $\mathbf{s_i}=\mathbf{n_i}\times\mathbf{k_{i+1}}/\|\mathbf{n_i}\times\mathbf{k_{i+1}}\|$ et $\mathbf{p_i}=\mathbf{k_i}\times\mathbf{s_i}/\|\mathbf{k_i}\times\mathbf{s_i}\|$, $\mathbf{p_i}'=\mathbf{k_{i+1}}\times\mathbf{s_i}/\|\mathbf{k_{i+1}}\times\mathbf{s_i}\|$, où $\mathbf{k_i}$ et $\mathbf{k_{i+1}}$ sont respectivement les vecteurs d'onde incident et réfléchi sur le miroir i (voir figure 2.2.). La matrice J est donc exprimée dans la base $\{\mathbf{s_1}, \mathbf{p_1}\}$ et les bases orthogonales $\{\mathbf{s_i},\mathbf{p_i},\mathbf{k_i}\}$ sont ici directes.

Le champ électrique circulant dans la cavité et le gain de la cavité sont donnés par :

$$\mathbf{E_{circ}} \propto \left[\sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty}\left(\mathbf{J}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\psi}\right)^{\mathbf{n}}\right]\mathbf{t}_1\mathbf{V}_0, \quad \mathbf{G} = \left\|\left[\sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty}\left(\mathbf{J}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\psi}\right)^{\mathbf{n}}\right]\mathbf{t}_1\mathbf{V}_0\right\|^2 \tag{II.1.7}$$

Où t_1 est la matrice de transmission 2×2 du miroir d'injection 1 et où ψ est le déphasage correspondant à un aller-retour [1]. Les séries sont facilement calculées dans la base des vecteurs propres $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ de J. On obtient :

$$\mathbf{E_{circ}} \propto \mathbf{U}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{1-\xi_1\mathbf{e}^{\mathbf{i}\zeta_1}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\psi}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1-\xi_2\mathbf{e}^{\mathbf{i}\zeta_2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\psi}} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}\cdot\mathbf{t}_1\cdot\mathbf{V}_0,\ \text{avec } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{s}_1\cdot\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{p}_1{}'\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{p}_1{}'\cdot\mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \quad \text{(II.1.8)}$$

Où $\xi_1\exp(i\zeta_1)$ et $\xi_2\exp(i\zeta_2)$ sont deux valeurs propres de *J*. Si $\zeta_1 \neq \zeta_2$, c'est-à-dire lorsque les miroirs de la cavité sont désalignés, alors les deux vecteurs propres présentent des fréquences de résonances différentes. Comme la cavité est asservie sur une fréquence unique, on a considéré l'algorithme simple suivant pour effectuer nos calculs :

$$\begin{aligned}
&\text{Si } \left|\mathbf{e_1}\cdot\mathbf{t}_1\mathbf{V}_0\right| > \left|\mathbf{e_2}\cdot\mathbf{t}_1\mathbf{V}_0\right| : \mathbf{E_{circ}} \propto \mathbf{U}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{1-\xi_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1-\xi_2\mathbf{e}^{\mathbf{i}(\zeta_2-\zeta_1)}} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{t}_1\mathbf{V}_0 \\
&\text{Si } \left|\mathbf{e_2}\cdot\mathbf{t}_1\mathbf{V}_0\right| \geq \left|\mathbf{e_1}\cdot\mathbf{t}_1\mathbf{V}_0\right| : \mathbf{E_{circ}} \propto \mathbf{U}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{1-\xi_1\mathbf{e}^{-\mathbf{i}(\zeta_2-\zeta_1)}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1-\xi_2} \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{t}_1\mathbf{V}_0
\end{aligned} \quad \text{(II.1.9)}$$

Enfin, les composantes du vecteur de Stockes sont calculées à partir de l'expression du champ circulant dans la cavité

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{\left|\mathbf{E_{circ}}\cdot\mathbf{s}\right|^2 - \left|\mathbf{E_{circ}}\cdot\mathbf{p}\right|^2}{\left\|\mathbf{E_{circ}}\right\|^2} \\
\mathrm{S}_2 &= \frac{\left(\mathbf{E_{circ}}\cdot\mathbf{s}\right)\left(\mathbf{E_{circ}}\cdot\mathbf{p}\right)^* + \left(\mathbf{E_{circ}}\cdot\mathbf{s}\right)^*\left(\mathbf{E_{circ}}\cdot\mathbf{p}\right)}{\left\|\mathbf{E_{circ}}\right\|^2} \\
\mathrm{S}_3 &= \frac{\mathrm{i}\left[\left(\mathbf{E_{circ}}\cdot\mathbf{s}\right)\left(\mathbf{E_{circ}}\cdot\mathbf{p}\right)^* - \left(\mathbf{E_{circ}}\cdot\mathbf{s}\right)^*\left(\mathbf{E_{circ}}\cdot\mathbf{p}\right)\right]}{\left\|\mathbf{E_{circ}}\right\|^2}
\end{aligned} \quad \text{(II.1.10)}$$

2. Résultats numériques

Pour effectuer les calculs, nous avons fixé L = 500 *mm*, h = 50 *mm* et la longueur d'onde du laser λ= 1 030 nm. Pour les cavités planaires et non planaires en Z, nous avons pris d = 250 mm. Ces chiffres correspondent à la cavité typique envisagée pour les expériences de diffusion Compton décrites dans l'introduction, *i.e.* pour un aller-retour d'environ 2 *m*. Les rayons de courbures des miroirs 3 et 4 sont pris égaux et notés R, on pose $R = \left\|\overrightarrow{M_{c3}M_{c4}}\right\|\cos(\theta_0)$ qui correspond aux plus petits waists de la cavité [116].

2.1. Tolérances mécaniques

Pour estimer les tolérances mécaniques, l'axe optique est calculé pour toutes les 2^{20} combinaisons des paramètres de désalignement $\Delta r_i = \{-1,+1\}$ µm, avec $\Delta r_i = \Delta X_i, \Delta Y_i, \Delta Z_i$ et $\Delta\Theta_i = \{-1,+1\}\,\mu\mathrm{rad}$, avec $\Delta\Theta_\imath = \Delta\theta_{xi}, \Delta\theta_{yi}$. Pour chaque configuration, les distances entre les centres des miroirs et l'axe optique $\left\|\overrightarrow{M_{ci}M_i}\right\|$ sont enregistrées. La valeur maximale de

$\left\|\overrightarrow{M_{ci}M_i}\right\|$ entre les 2^{20} configurations est prise comme le paramètre de tolérance (toutes ces configurations sont indépendantes).

On obtient une longueur de tolérance de 9 μm pour les cavités en configuration “bow-tie” et “tétraèdre”. En fixant L et en changeant h = 100 *mm*, les tolérances ne changent pas significativement (on obtient 9,5 µm au lieu de 9 μm) et en changeant L à 1 000 *mm*, on augmente la tolérance à 12 μm.

Comme pour les cavités planaires en U et Z, il a été démontré [117] que la condition $R = \left\|\overrightarrow{M_{c3}M_{c4}}\right\|\cos(\theta_0)$ correspond à une configuration instable. Cependant, contrairement à [117], où les cavités pliées en Z étaient considérées pour des lasers à colorants, nous avons la liberté ici de choisir la distance entre le miroir plan et le miroir sphérique $D = \left(\left(h/2\right)^2 + d^2\right)^{1/2}$. La figure 2.3. montre la longueur de tolérance Δ_{max} en fonction de D pour une cavité à quatre miroirs planaire et non planaire et pour les géométries en U et en Z. Pour obtenir ces courbes, nous avons considéré uniquement les désalignements angulaires $\Delta\Theta_i = \{-1, +1\}$ µm (avec $\Delta r_i = 0$) et nous avons fixé L = 1 000 mm et $\theta_0 = \pi/4$ pour la géométrie en Z planaire et non planaire. Sur cette figure, on peut voir que les configurations non planaires sont beaucoup plus stables lorsque D augmente et que l'instabilité augmente énormément dans le cas de la configuration planaire. On peut aussi constater que la géométrie en U est plus stable que celle en Z (diminuer θ_0 dans ce dernier cas augmente Δ_{max}) et que les configurations non planaires sont beaucoup plus stables. Nous avons vérifié que, dans tous les cas, Δ_{max} diminue lorsque $R < \left\|\overrightarrow{M_{c3}M_{c4}}\right\|\cos(\theta_0)$.

Du point de vue de la stabilité mécanique, il ressort que les géométries en U et en Z peuvent être envisagées à condition que les paramètres *h, d* et θ_0 soient choisis avec soin. Parmi ces configurations, la configuration non planaire en U offre des caractéristiques géométriques très intéressantes lorsque l'implantation d'une cavité à quatre miroirs sur un accélérateur d'électrons est envisagée mais l'inconvénient est que les modes propres de cette cavité sont très elliptiques.

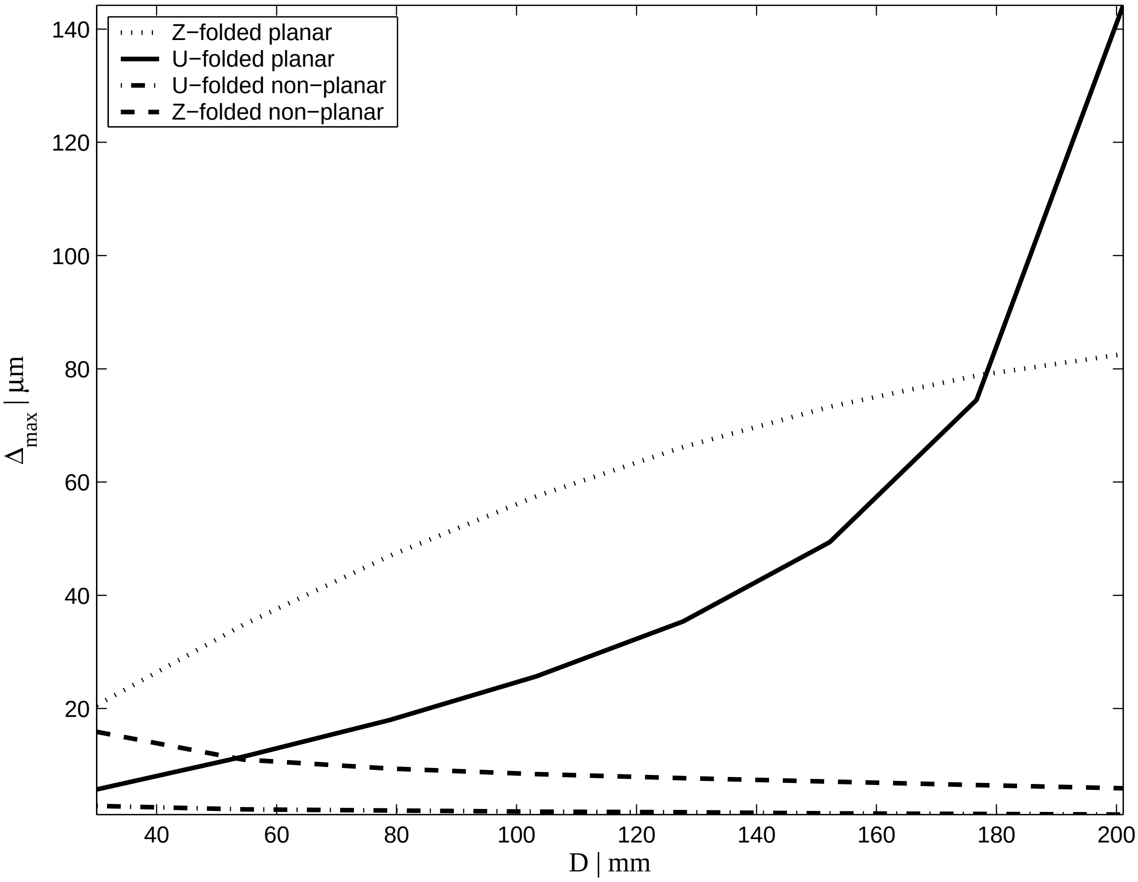


Figure 2.3. Longueur de tolérance en fonction de la distance entre les miroirs plans et les miroirs sphériques pour les cavités pliées en Z et en U, géométries planaire et non planaire. Seuls les désalignements angulaires sont pris en compte pour calculer Δ_{max}.

2.2. *S*tabilité de la polarisation et gain de la cavité en 'bow-tie'

Pour estimer numériquement la sensibilité de vecteurs propres de polarisation et le champ circulant dans la cavité aux mouvements des miroirs, on va considérer uniquement les désalignements angulaires $\Delta\Theta_i = \{-500, 0, +500\}\ \mu\text{m}$, *i.e.* 3^8 configurations. Ce nombre réduit le temps de calcul et il est suffisant pour faire ressortir les instabilités de polarisation dans la cavité à quatre miroirs. Le choix de 500 µrad pour l'angle de désalignement correspond aux désalignements résiduels d'une cavité typique. Concernant le nombre de multicouches constituant le revêtement des miroirs, on va choisir *N* = 4, 12, 20 pour les miroirs 2, 3, 4 et *N*-2 pour le miroir d'entrée 1 pour tenir compte du *matching* de la phase de la cavité [118].

En posant $\mathbf{V_0} = (1, i)/\sqrt{2}$, les distributions de gain des 3^8 configurations sont représentées sur la figure 2.5. pour *N*=4, 12, 20. Bien que le gain soit stable contre les désalignements pour *N*=4, des instabilités apparaissent pour de plus larges valeurs de *N*, *i.e.* lorsque la finesse de la cavité est haute. On obtient une dispersion de ~ 20 % du gain de la cavité pour *N* = 20. Cette dispersion est réduite en considérant des valeurs plus petites de $\Delta\Theta_i$ µrad, mais il reste important pour des désalignements angulaires des miroirs de l'ordre de dizaines de micro-radians. Notez que pour un miroir d'un pouce de diamètre monté dans un support "gimbal", une inclinaison de 10 µ rad, correspond à une amplitude de vibrations ~ 130 nm du bord par rapport au centre de miroir. Le degré de polarisation circulaire S3 du champ circulant dans la cavité est montré dans figure 2.10. pour N = 4, 12 et 20. Sur ces figures, on voit que les instabilités du gain reflètent les instabilités de couplage de polarisation. Pour cerner cet effet, les polarisations de vecteurs propres sont montrées sur la figure 2.4.

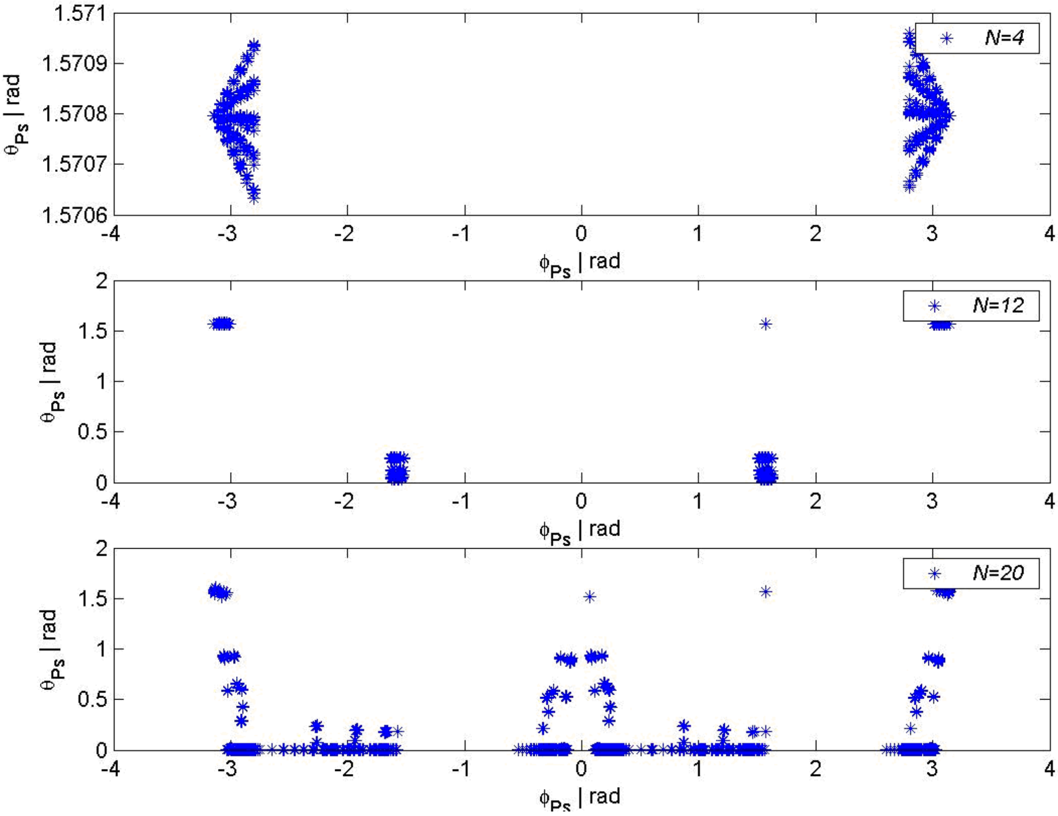


Figure 2.4. Représentation des vecteurs propres sur la sphère de Poincaré pour une cavité en Bow-tie et pour plusieurs nombres *N* de multicouches de revêtement des miroirs. Les paramètres géométriques sont fixes à *L* = 500 mm et *h* = 50 mm.

La représentation de la sphère de Poincaré des vecteurs de polarisation [119] est adoptée avec le choix suivant pour l'angle polaire $\theta_{Ps} = \cos^{-1}(S_3)$ et l'angle d'azimut $\phi_{Ps} = \tan^{-1}(S_2 / S_1)$.

En changeant h = 100 mm à h = 200 mm et gardant L = 500 mm, on obtient la distribution du gain de la figure 2.11. En comparant avec la figure 2.5., on voit que plus la valeur de h est grande, et donc plus l'angle d'incidence est large, plus grandes sont les instabilités.

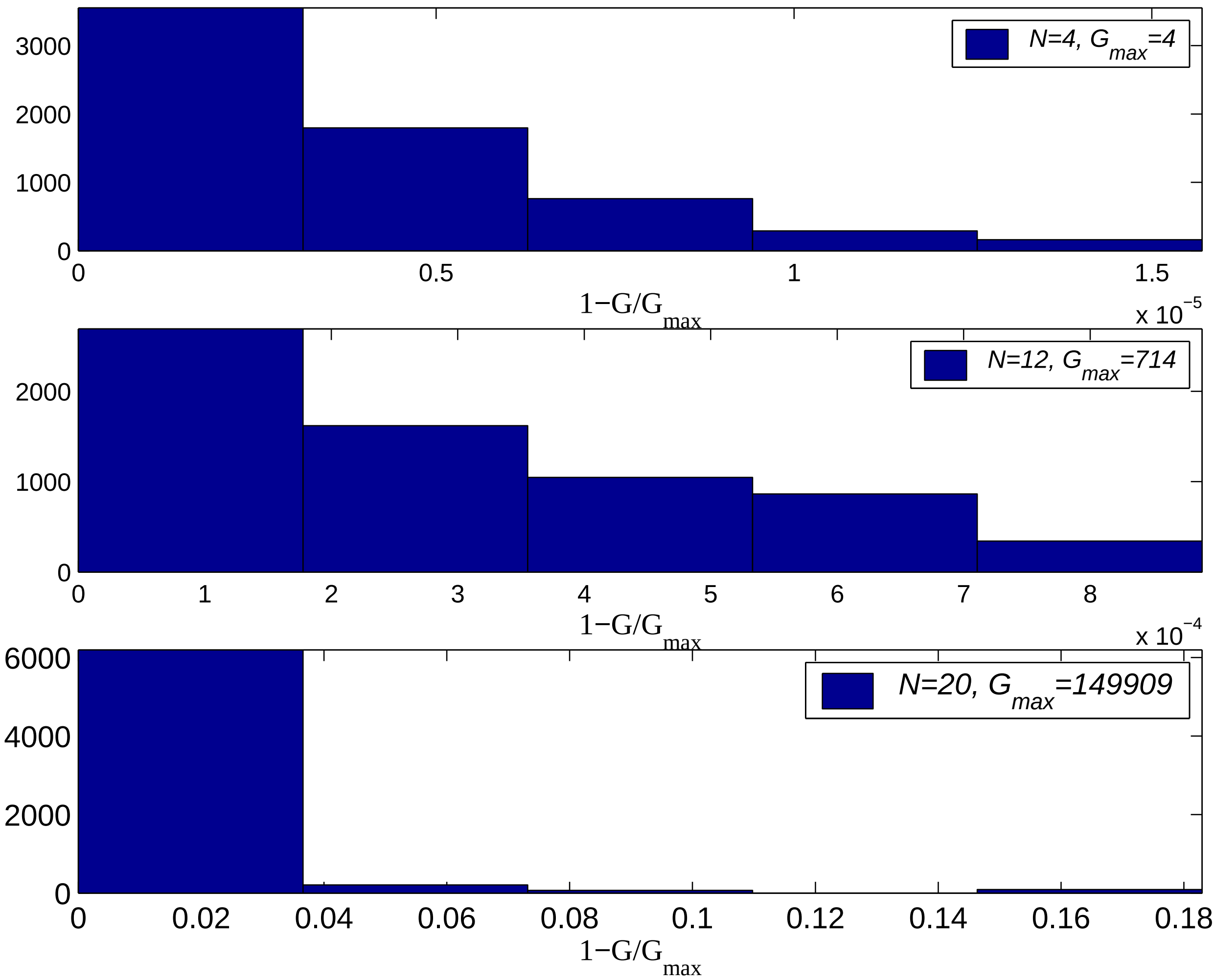


Figure 2.5. Distribution du gain relatif de la cavité planaire en noeud papillon planaire pour plusieurs nombres *N* de multicouches de revêtement. Les paramètres géométriques sont fixes à *L* = 500 mm et *h* = 50 mm et le vecteur polarisation incident est $\mathbf{V_0} = (1, i)/\sqrt{2}$.

En gardant $h = 200\ mm$ et $L = 500\ mm$ et en fixant $\mathbf{V_0} = (1,0)$, on obtient la distribution du gain et le degré de polarisation montrés sur la figure 2.6. et la figure 2.7. respectivement. On peut voir que le couplage maximum est plus grand mais que la dispersion du gain et de S_3 sont beaucoup plus larges. On peut aussi voir que, lorsque la finesse augmente, le faisceau circulant dans la cavité tend à être polarisé circulairement. Dans la figure 2.7., le pic autour de $S_3 = 0$ correspond aux configurations de désalignements où les miroirs sont inclinés dans le plan de la cavité.

De cette étude numérique, il ressort que les instabilités de polarisation sont sensibles à la géométrie de la cavité et à $\mathbf{V_0}$. On peut aussi voir que, pour une géométrie donnée, la finesse de la cavité est le paramètre critique. Les instabilités observées dans les distributions du gain et S_3 augmentent non linéairement si la finesse augmente et, pour une finesse fixée, si les angles d'incidences augmentent.

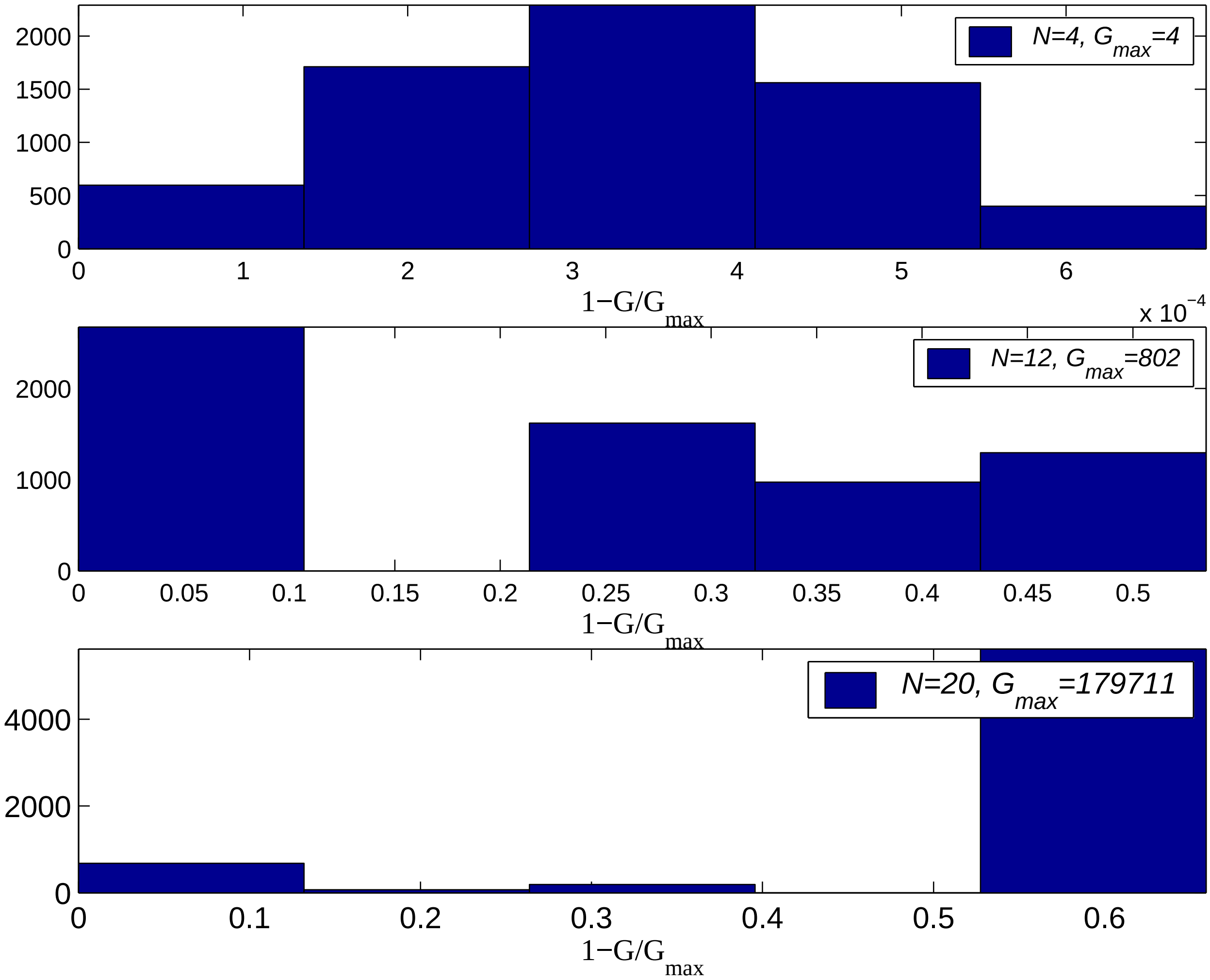


Figure 2.6. La même que Figure 2.11. mais pour $\mathbf{V_0} = (1,0)$.

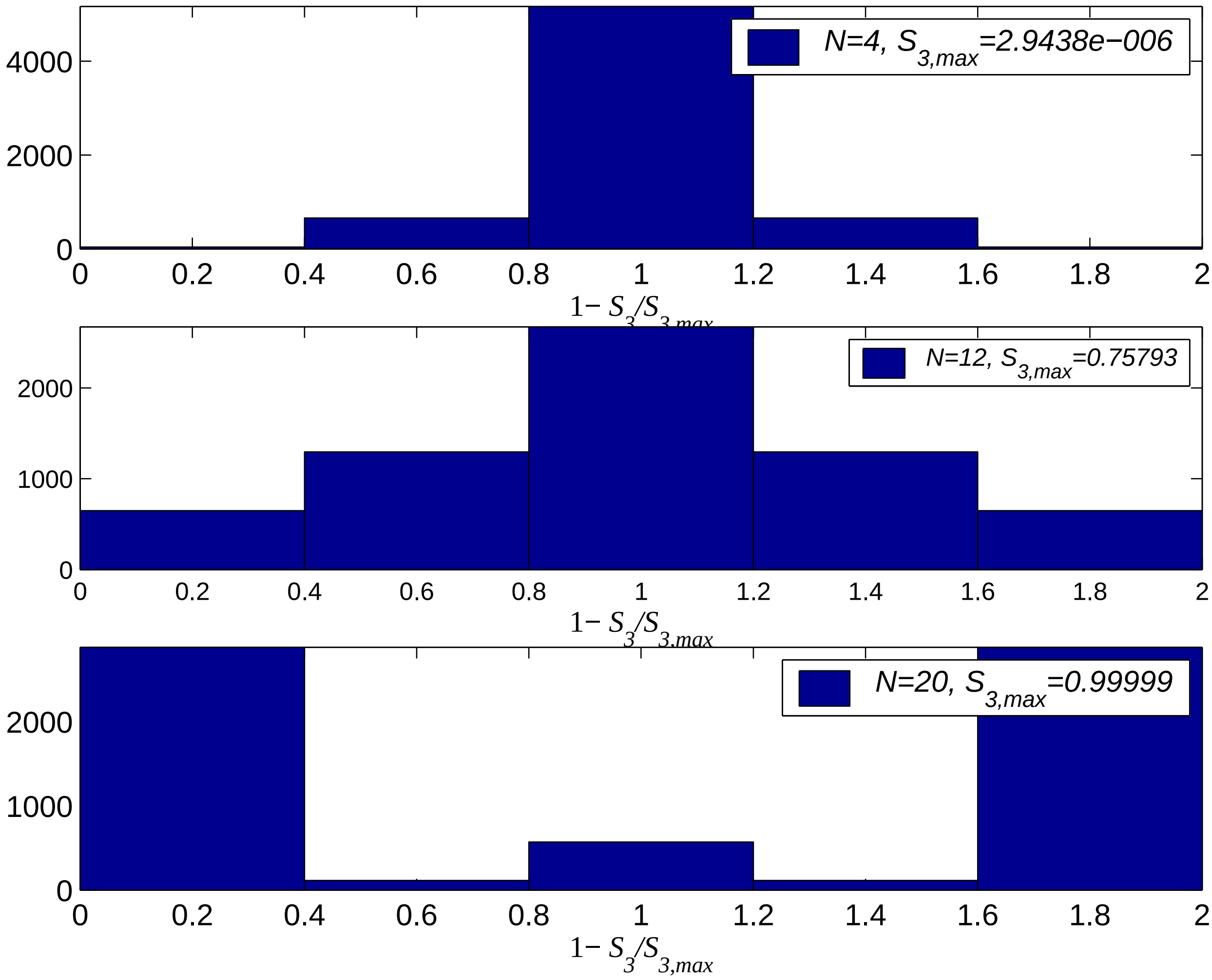


Figure 2.7. Distribution du degré de polarisation circulaire relatif pour une cavité planaire en bow-tie pour plusieurs nombres *N* de multicouches de revêtement. Les paramètres géométriques sont fixes à *L* = 500 mm et *h* = 100 mm et le vecteur polarisation incident est $\mathbf{V_0} = (1, 0)$.

2.3. Polarisation de la cavité en tétraèdre

La même étude numérique a été faite pour une cavité en tétraèdre non planaire. Le résultat principal est que, quels que soient les désalignements des miroirs, les vecteurs propres sont toujours polarisés circulairement. Cela vient très probablement de la forme du chemin optique (voir la figure 2.2.). Le gain de la cavité est représenté dans la figure 2.9. pour $\mathbf{V_0} = (1, i)/\sqrt{2}$, *h* = 100 mm et *L* = 500 mm. En comparant avec la figure 2.11., on peut voir que le gain de la cavité est fortement stabilisé par la configuration non planaire. On peut aussi observer que 1-|S_3| $\lessapprox 10^{-5}$ quel que soit le nombre de multicouches du revêtement.

En changeant le vecteur de polarisation incident à $\mathbf{V_0} = (1, 0)$ on obtient le gain de la cavité montré sur la figure 2.8. Le gain est encore stable mais il est fortement réduit à haute finesse à cause du couplage entre le vecteur de polarisation incident et le vecteur propre de la cavité. La figure 2.12. montre S_3 du champ circulant dans la cavité. Cette figure montre que la cavité en tétraèdre de haute finesse agit comme un filtre de polarisation circulaire bien que le signe de la polarisation circulaire ne soit pas défini.

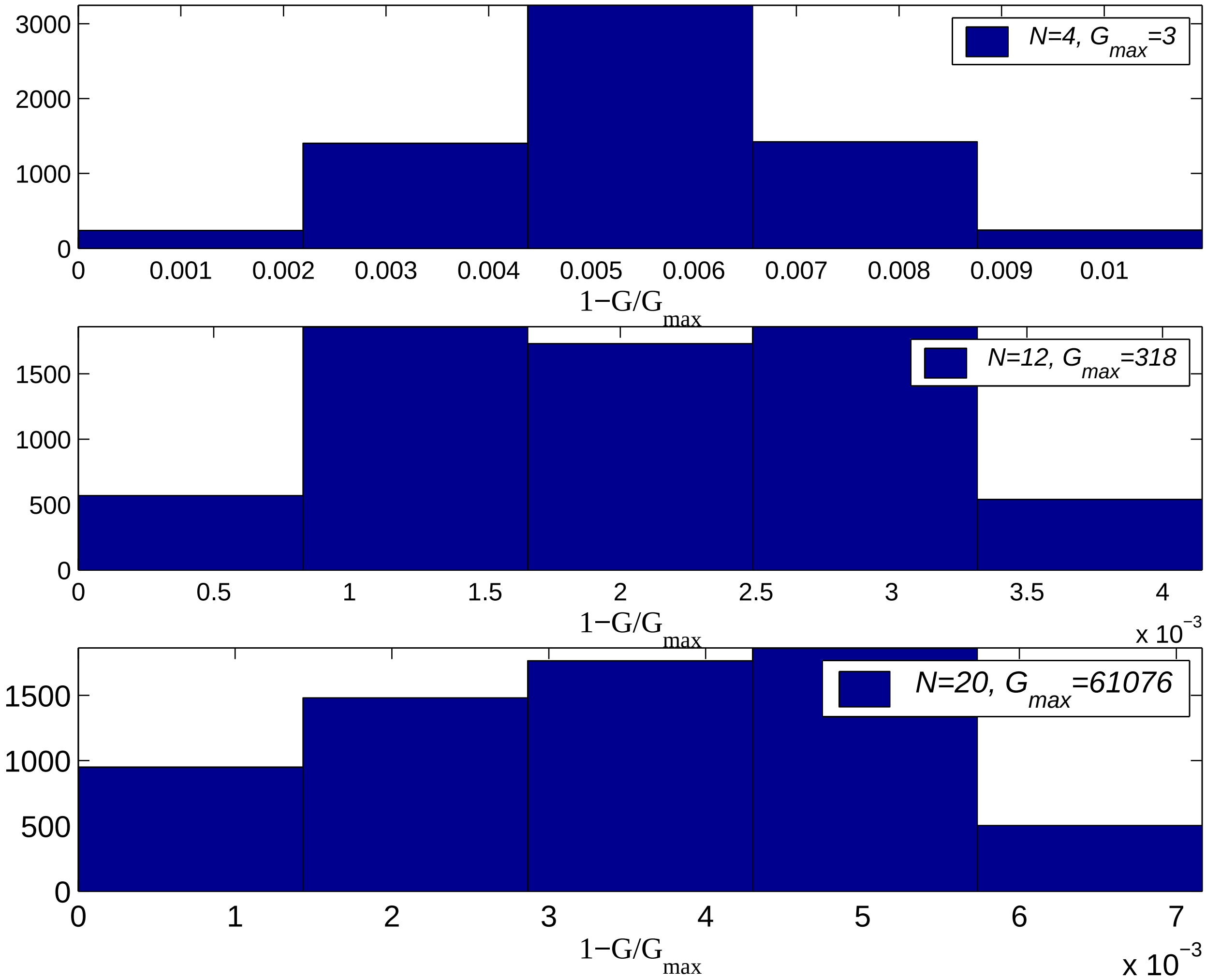


Figure 2.8. Distribution du gain relatif d'une cavité non planaire en tétraèdre pour plusieurs nombres *N* de multicouches de revêtement. Les paramètres géométriques sont fixes à *L* = 500 mm et *h* = 100 mm et le vecteur polarisation incident est $\mathbf{V}_0 = (1,0)$.

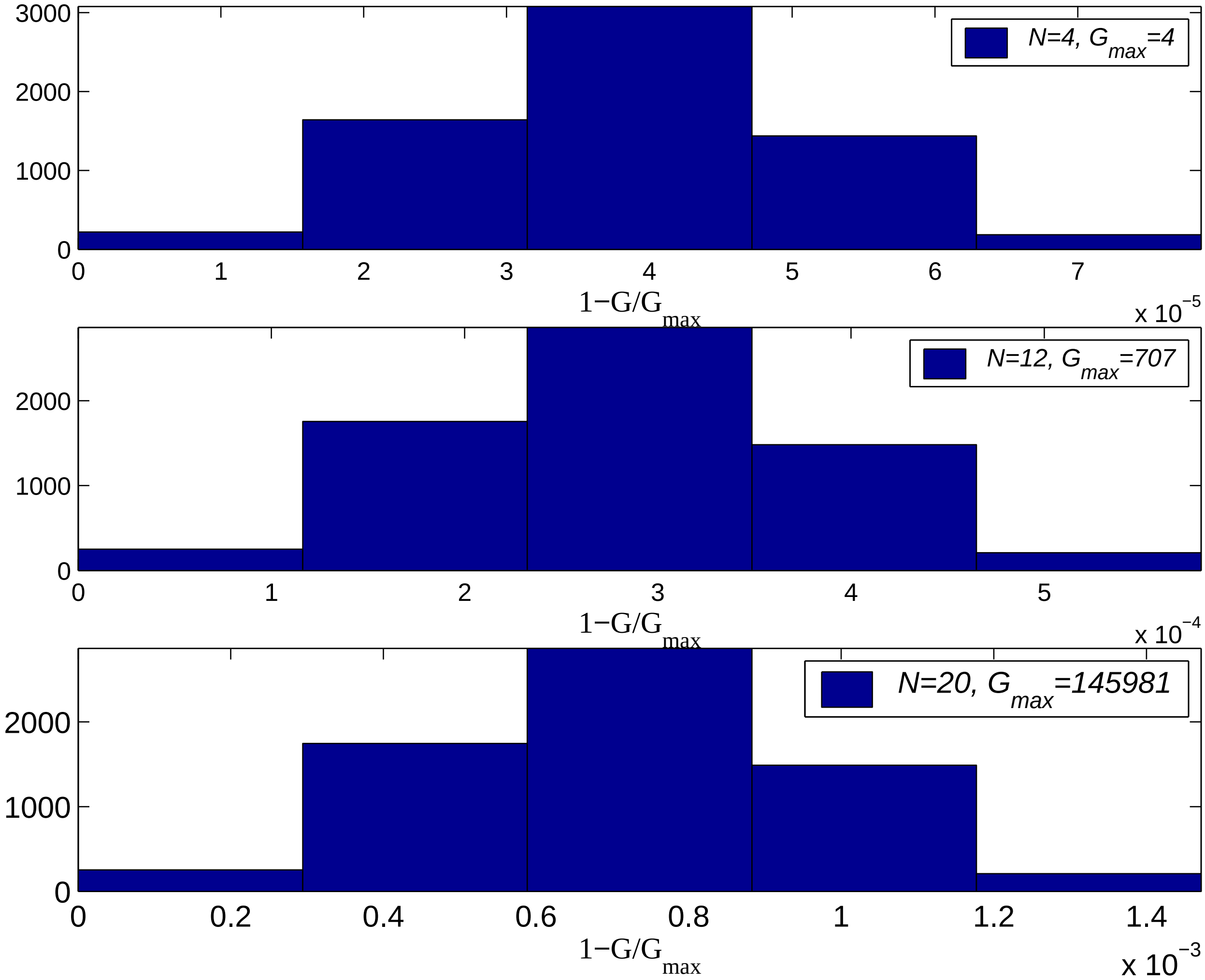


Figure 2.9. Distribution du gain relatif de la cavité non planaire en tétraèdre pour plusieurs nombres *N* de multicouches de revêtement. Les paramètres géométriques sont fixes à *L* = 500 mm et *h* = 100 mm et le vecteur polarisation incident est $\mathbf{V_0} = (1, i)/\sqrt{2}$ **.**

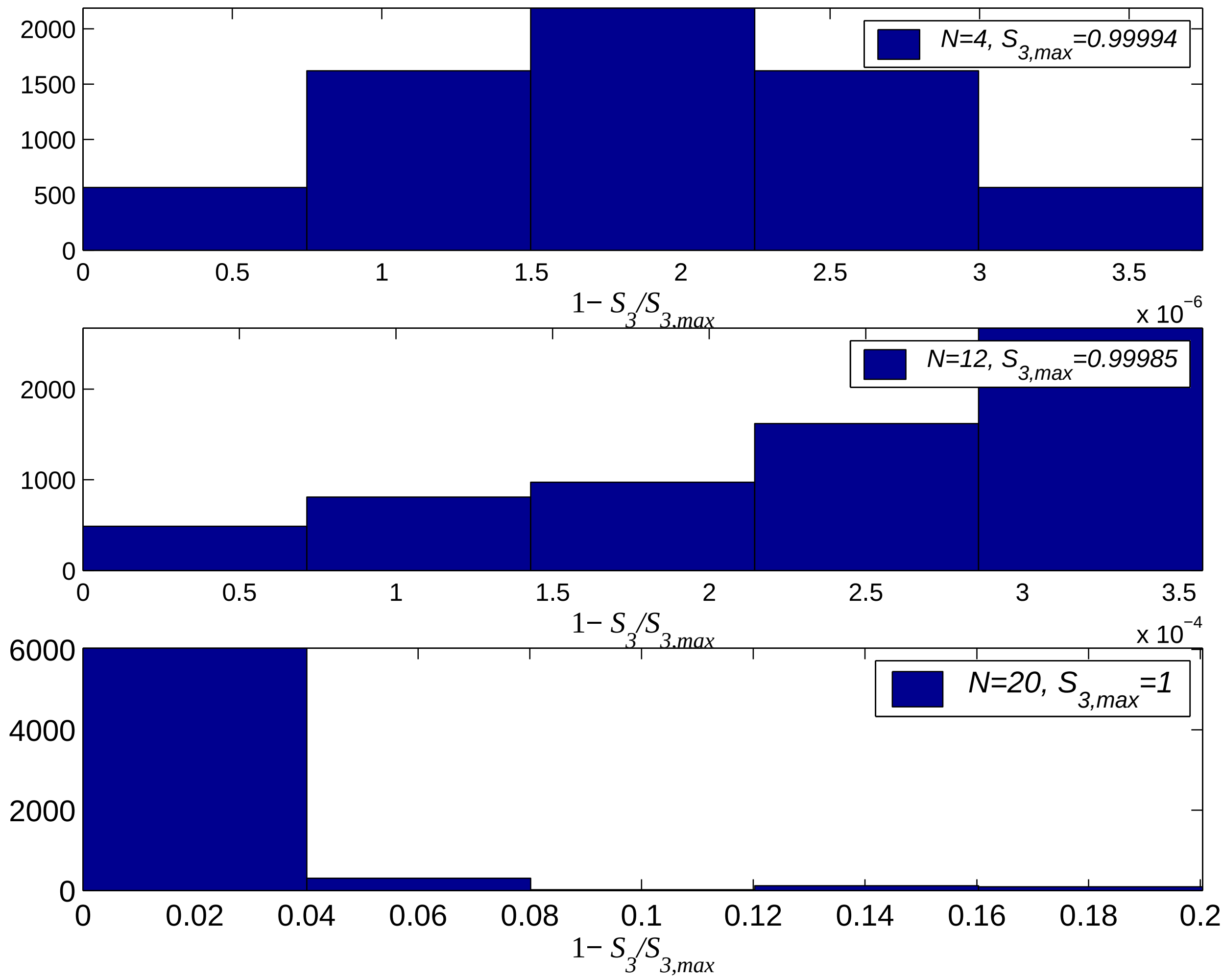


Figure 2.10. Distribution du degré de polarisation circulaire relatif pour une cavité planaire en bow-tie pour plusieurs nombres *N* de multicouches de revêtement. Les paramètres géométriques sont fixes à *L* = 500 mm et *h* = 50 mm et le vecteur polarisation incident est $\mathbf{V_0} = (1, i)/\sqrt{2}$ **.**

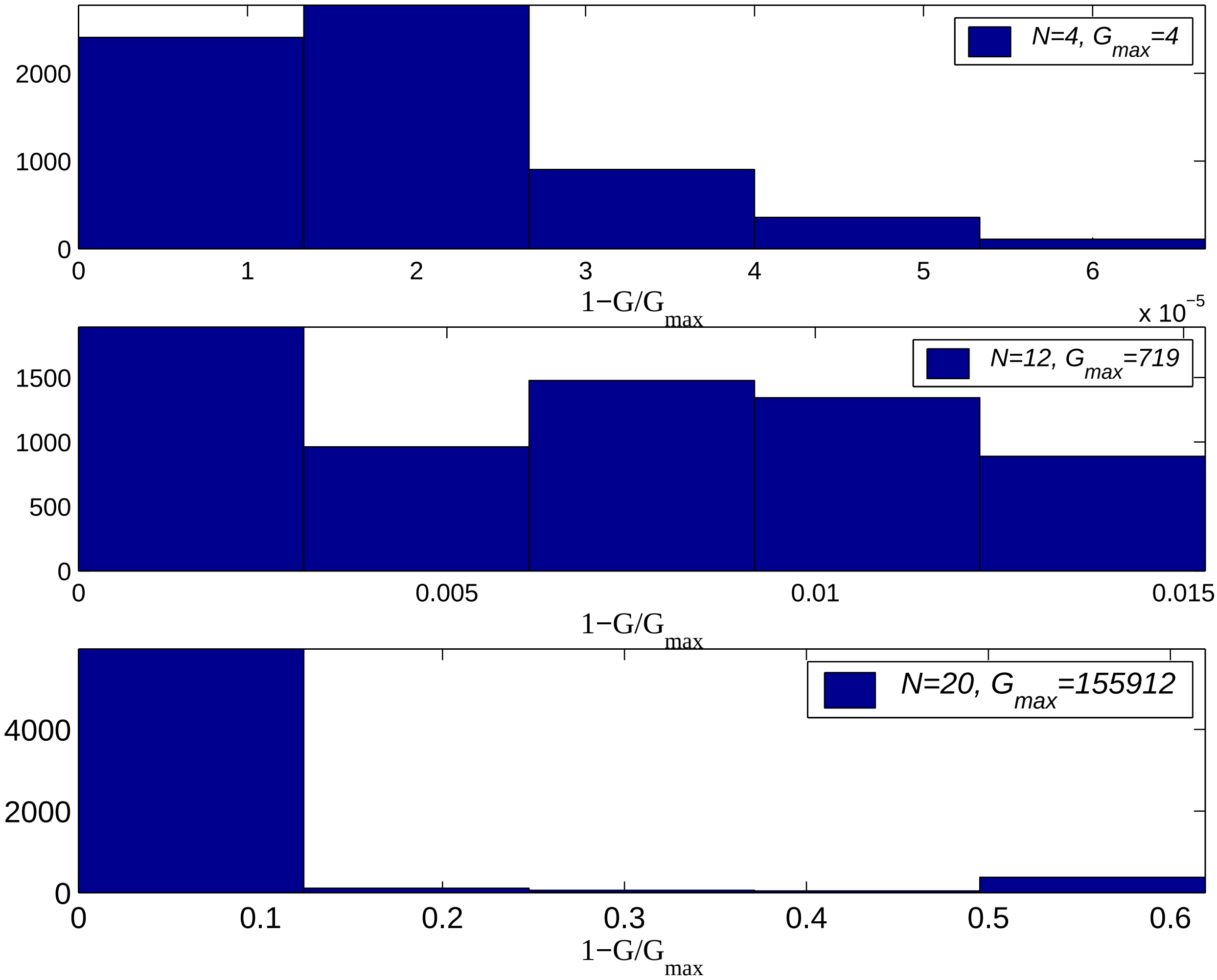


Figure 2.11. Distribution du gain relatif de la cavité planaire en noeud papillon planaire pour plusieurs nombres *N* de multicouches de revêtement. Les paramètres géométriques sont fixes à *L* = 500 mm et *h* = 100 mm et le vecteur polarisation incident est $\mathbf{V_0} = (1, i)/\sqrt{2}$ **.**

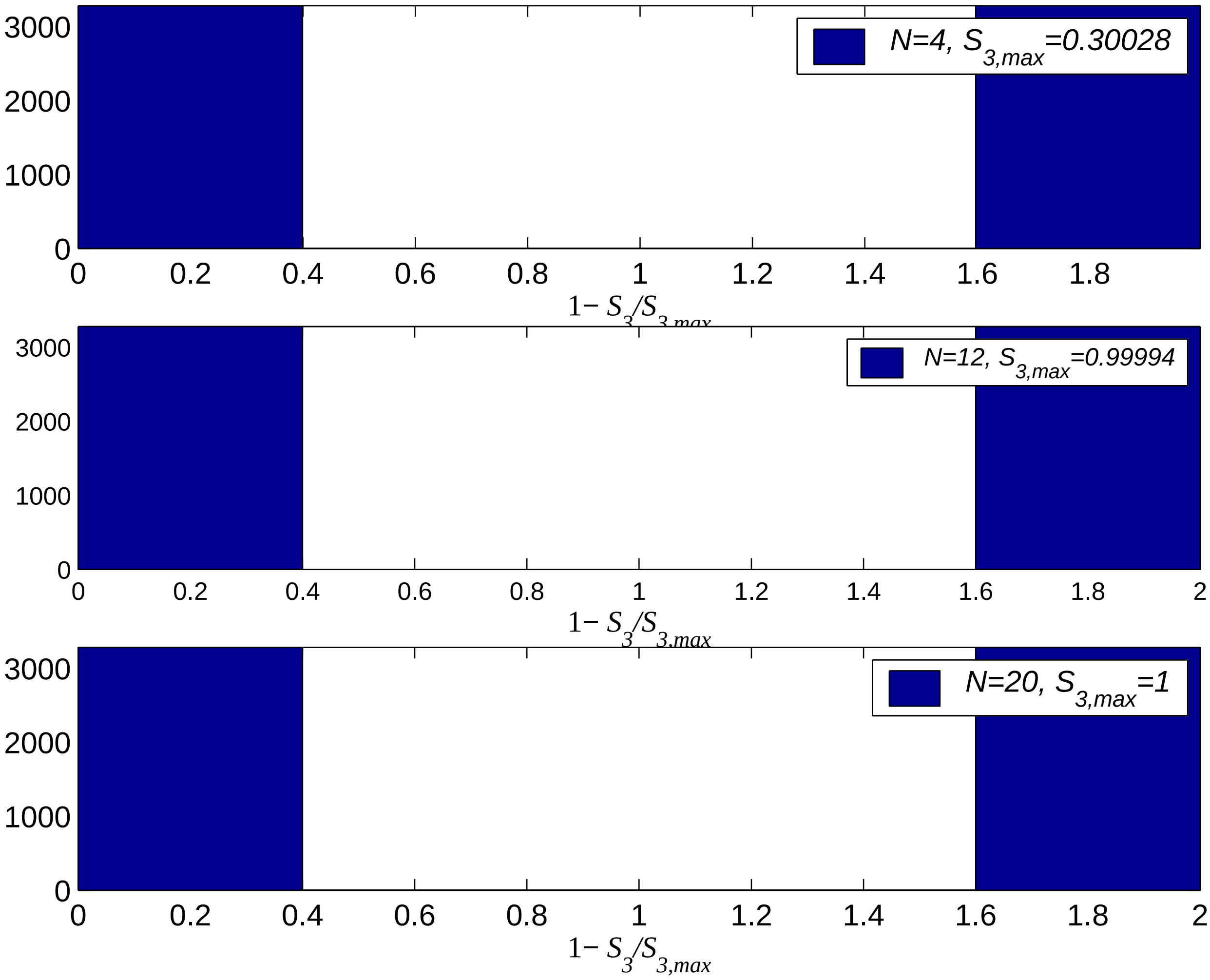


Figure 2.12. Distribution du degré de polarisation circulaire relatif pour une cavité non planaire en tétraèdre pour plusieurs nombres *N* de multicouches de revêtement. Les paramètres géométriques sont fixes à *L* = 500 mm et *h* = 100 mm et le vecteur polarisation incident est $\mathbf{V_0} = (1,0)$.

2.3. Stabilité de la polarisation des cavités en U et en Z

Afin de ne pas charger ce document avec plus d'histogrammes, nous allons discuter ici les résultats pour les cavités en U et en Z par rapport aux résultats numériques indiquées ci-dessus. Pour $\mathbf{V_0} = (1,i)/\sqrt{2}$, h = 100 mm ou 50 mm, d = 250 mm et L = 500 mm, on obtient des distributions de gain de la cavité et S3 similaires à la cavité planaire en nœud papillon. Ici, l'extension non planaire de la cavité Z ne réduit pas les instabilités. La raison en est que l'axe optique est toujours auto retraçant si bien que les modes propres sont polarisés linéairement à faible finesse et deviennent légèrement elliptiques lorsque la finesse augmente.

3. Synthèse

Nous avons montré numériquement que le couplage de la polarisation entre le faisceau laser incident et les modes propres de la cavité à quatre miroirs induit des instabilités de gain et de polarisation lorsque les mouvements des miroirs sont pris en compte. Pour les géométries planaires en “bow-tie” et en Z, ces instabilités sont de petite taille lorsque les angles d'incidence sur les miroirs de la cavité de haute finesse sont toujours suffisamment petits. Ils augmentent non linéairement lorsque la finesse de la cavité ou l'angle d'incidence augmente.

Nous avons étudié les extensions non planaires des cavités en “bow-tie” et en Z. Nous avons constaté que, si la géométrie non planaire en Z ne peut pas réduire les instabilités de polarisation, la géométrie tétraèdre les réduit à un niveau très faible.

Un aspect des revêtements des miroirs qui n'a pas été abordé dans cette étude est leur biréfringence résiduelle [120]. Bien que cet effet soit très faible, il devrait avoir des effets notables. Mais nous n'avons pas trouvé une méthode robuste pour les inclure dans nos études numériques.

De cette étude, il ressort que la géométrie à quatre miroirs non planaire est la meilleure candidate pour les applications sur un accélérateur du point de vue de la stabilité mécanique, de polarisation et de puissance stockées. C'est pourquoi nous avons choisi la configuration en “bow-tie” pour notre activité de recherche et développement. La partie expérimentale est dédiée à l'étude des modes des deux configurations planaire et non planaire de la cavité en nœud papillon.

II. Modes de résonance de la cavité à quatre miroirs non planaire

Dans la section précédente, une étude détaillée des instabilités de gain et de la polarisation est présentée pour plusieurs configurations de cavité à quatre miroirs. À la fin, nous avons conclu que la cavité à quatre miroirs en nœuds papillon est la meilleure alternative pour les applications sur un accélérateur parce que cette configuration est stable et que sa version non planaire élimine les instabilités de polarisation.

Dans cette partie, nous présenterons un calcul théorique des modes de résonance d'une cavité à quatre miroirs en “bow-tie” planaire et non planaire.

Nous avons vu dans la section précédente, une description de la détermination de l'axe optique des modes de résonance de la cavité à quatre miroirs non planaire. Dans ce qui suit, on décrira la méthode utilisée pour calculer le mode fondamental, ainsi que les modes supérieurs. On supposera donc que l'axe optique des cavités est connu et on utilisera la méthode théorique entièrement décrite dans [92] pour calculer les modes propres.

Pour calculer les modes de ce genre de résonateur non orthogonal, introduisons d'abord la méthode décrite dans [92].

Un champ électrique scalaire elliptique généralisé est décrit par :

$$E(x,y,z,t) = \psi(x,y,z)e^{i(\omega-kz)} \qquad \text{(II.2.1)}$$

Avec :

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{\exp(-i\frac{k}{2}\mathbf{r}^t Q\mathbf{r})}{\sqrt{\det(Q)}}; \quad \mathbf{r} = (x,y) \qquad \text{(II.2.2)}$$

où Q est la matrice 2 x 2 du front d'onde complexe. Il peut être écrit sous la forme :

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_x & 0 \\ 0 & q_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{(II.2.3)}$$

Si φ est réel, le faisceau est appelé un faisceau astigmatique simple (si $q_x = q_y$, le faisceau est stigmatique), si φ est complexe, celui-ci est alors astigmatique général.

Il est à noter que la propagation du waist d'un faisceau astigmatique général est différente du cas d'un faisceau stigmatique standard et de celui d'un faisceau astigmatique simple. Les expressions sont données dans [92][49].

L'approximation paraxiale permet de factoriser la partie vectorielle du champ électrique. Cette approximation reste valide tant que $\lambda/\mathrm{w} \ll 1$, c'est-à-dire que la longueur d'onde est très petite devant le waist du faisceau (un facteur dix est généralement suffisant pour que l'approximation paraxiale reste valable).

1. Détermination des modes propres en utilisant les rayons complexes :

Les bases théoriques de la méthode viennent de la référence [93].

Soit $E(r_1;t)$ le champ électrique. Après un aller-retour, le champ est transformé en :

$$E(r_2;t)=\pm\frac{i}{\lambda}\iint E(r_1,t)K(r_1,r_2)d^2r_1,\ \text{ avec }\ K(r_1,r_2)=\sqrt{\det\left[\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x_i\partial x_j{}'}\right]}\exp\left(-ik\Gamma(r_1,r_2)\right)\quad\text{(II.2.4)}$$

$\Gamma(r_1,r_2)$ est le point caractéristique du système optique.

Notons par q_1 et q_2 les coordonnées des points de départ et d'arrivée (après un aller-retour) dans un plan de référence transverse au rayon de départ. p_1 et p_2 sont les directions correspondantes des rayons données par les relations suivantes :

$$\begin{cases} p_1=\nabla_1\Gamma(r_1,r_2) \\ p_2=\nabla_2\Gamma(r_1,r_2)\end{cases}\quad\text{(II.2.5)}$$

Avec $S = \Gamma\text{-}z_1$ et $E_i = \psi_t \exp[i(\omega t\text{-}kz_i)]$, on peut écrire, pour ψ,

$$\psi(r_2;t)=\pm\frac{i}{\lambda\sqrt{\det\left[\frac{\partial^2 S}{\partial x_i\partial x_j{}'}\right]}}\iint\psi(r_1,t)\exp\left(-ikS(r_1,r_2)\right)d^2r_1,\quad\text{(II.2.6)}$$

C'est l'intégrale de diffraction de Huygens où le facteur d'inclinaison a été négligé. Cette approximation est justifiée dans le cas de l'approximation paraxiale, que nous avons supposée implicitement en factorisant la partie vectorielle et spatiale du champ électrique. Avec l'approximation paraxiale, on peut supposer une forme bilinéaire pour le point caractéristique :

$$S=\frac{1}{2}\left(r_1Ur_1+r_1Vr_2+r_2V^tr_1+r_2Wr_2\right)\quad\text{(II.2.7)}$$

En introduisant (II.2.7) dans (II.2.5), on obtient :

$$\begin{pmatrix}-p_1\\ p_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U & V\\ V^t & W\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\end{pmatrix}\quad\text{(II.2.8)}$$

À partir de la matrice ABCD d'un aller-retour M_{RT}, nous avons :

$$\begin{pmatrix}p_2\\ q_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_2\\ q_2\end{pmatrix}\quad\text{(II.2.9)}$$

Où A, B, C, D sont des matrices 2x2 (ces matrices sont proportionnelles à la matrice identité dans le cas d'un faisceau stigmatique mais pas dans le cas de stigmatisme simple ou d'astigmatisme généralisé).

Cela mène à la relation entre les deux sous-matrices 2x2 :

$$U=B^{-1}A,\quad V=-B^{-1},\quad V^t=C-DB^{-1}A,\quad W=DB^{-1}\quad\text{(II.2.10)}$$

Le champ du faisceau de rayons est donné par $E = A\exp(-ik\mathcal{E})$, $\mathcal{E}$ est appelé la fonction d'eikonal. Dans [92], il a été démontré qu'un champ électrique peut être déterminé par deux rayons complexes. On peut introduire $\Phi = \mathcal{E} - z$ puis :

$$\Phi(r,z)=\frac{1}{2}rQ(z)r\quad\text{(II.2.11)}$$

Où Q est la matrice du front d'onde. Si l'on choisit deux rayons $[p,q]$ et $[\overline{p},\overline{q}]$ du faisceau de rayons, on a :

$$\begin{cases} p = \nabla\Phi(q) = Qq \\ \overline{p} = \nabla\Phi(\overline{q}) = Q\overline{q} \end{cases} \tag{II.2.12}$$

On peut alors déterminer Q à partir des composantes des deux rayons $q = (x_1,y_1)$ et $p = (x_1',y_1')$, $\overline{q} = (\overline{x_1},\overline{y_1})$ et $\overline{p} = (\overline{x_1}',\overline{y_1}')$. Le champ correspondant à ces deux rayons est donné par :

$$\psi\left(r,z;[p,q],[\overline{p},\overline{q}]\right) = \frac{\pm 1}{\sqrt{h}}\exp\left(-i\frac{k}{2}rQr\right) \tag{II.2.13}$$

Avec $h = \det\left[\dfrac{\partial^2\Gamma}{\partial x_i \partial x_j'}\right]$.

Ce champ est exactement celui qui nous intéresse.

Cette méthode est très bonne car la matrice du front d'onde est maintenant déterminée par deux rayons complexes : une fois $[p,q]$ et $[\overline{p},\overline{q}]$ connus, les composantes complexes de la matrice Q sont déterminées directement par des transformations linéaires de l'équation (II.2.12), ces coordonnées sont données par :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \left(\overline{q}_2 p_1 - q_2\overline{p}_1\right)h^{-1} \\ Q_{22} &= \left(q_1\overline{p}_2 - \overline{q}_1 p_2\right)h^{-1} \\ Q_{12} &= Q_{21} = \left(q_1\overline{p}_1 - \overline{q}_1 p_1\right)h^{-1} \end{aligned} \tag{II.2.14}$$

Ces deux rayons sont obtenus en exigeant que ceux-ci soient des vecteurs propres de la cavité (modes propres correspondant à un chemin optique fermé à l'intérieur de la cavité).

Les rayons correspondant à un chemin optique fermé sont les vecteurs propres obtenus en posant $p_2 = ap_1$ et $q_2 = aq_1$ dans (II.2.9) :

$$0 = \left[U + W + \left(a + a^{-1}\right)V\right]q_1 \tag{II.2.15}$$

$$p = \frac{1}{2}\left[W - U + \left(a^{-1} - a\right)V\right]q_1 \tag{II.2.16}$$

Ces deux valeurs propres qui peuvent être mises sous la forme :

$$a = e^{\pm i\beta}, \overline{a} = e^{\pm i\overline{\beta}} \tag{II.2.17}$$

Elles existent seulement si les conditions de stabilité suivantes sont vérifiées :

$$\frac{a + a^{-1}}{2} = \cos\beta, \frac{\overline{a} + \overline{a}^{-1}}{2} = \cos\overline{\beta} \tag{II.2.18}$$

Où β et $\overline{\beta}$ sont des nombres réels.

En introduisant les valeurs propres a et $\overline{a}$ dans (II.2.15) et (II.2.16), on obtient deux équations de matrices 2x2 menant aux expressions des vecteurs propres (à des facteurs qui disparaissent dans le calcul de Q). On écrit eq. Alors :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = Gq_1 \quad \text{et} \quad p_1 = Hq_1 \tag{II.2.19}$$

La solution de la première équation pour q_1 est donnée par les facteurs de la matrice G, ensuite p_1 est obtenu en multipliant q_1 par H. Cependant, pour une cavité 2D, avec ou sans stigmatisme, il peut arriver que la matrice G soit singulière. Dans ce cas, on utilise les solutions particulières.

Une fois les vecteurs propres déterminés, la matrice Q est calculée. Nous avons vérifié numériquement que pour notre cavité à quatre miroirs à 2D et 3D, la condition d'un aller-retour pour un mode de la cavité $Q=(C+DQ)(A+BQ)^{-1}$ est remplie avec une précision numérique de 10^{-13} à 10^{-18} en fonction des positions relatives des miroirs et des rayons de courbure des miroirs.

2. Les modes d'ordres supérieurs de la cavité 3D (et 2D astigmatique)

Ils sont simplement donnés par l'application d'un opérateur sur les modes fondamentaux. La formule suivante est utilisée [92] :

$$\begin{aligned}\psi_{mn}\left(x^1,x^2,z,\Re,\overline{\Re}\right)=\psi_{00}\left(x^1,x^2,z,\Re,\overline{\Re}\right)\times\left[q^{1*}/w_1\,H\left(2^{1/2}\,x^1/w_1\right)+q^{2*}/w_2\,H\left(2^{1/2}\,x^2/w_2\right)\right]^m\\ \times\left[\overline{q}^{1*}/w_1\,H\left(2^{1/2}\,x^1/w_1\right)+\overline{q}^{2*}/w_2\,H\left(2^{1/2}\,x^2/w_2\right)\right]^n\end{aligned} \quad \text{(II.2.20)}$$

Où H est le polynôme d'Hermite, $x^i (i = 1,2)$ sont les coordonnées du référentiel propre et w_i représente le rayon du faisceau le long de l'axe des coordonnées.

$\Re$ et $\overline{\Re}$ sont les rayons complexes définis par $[p,q],[\overline{p},\overline{q}]$.

Les fréquences de résonance pour une onde continue sont par ailleurs données par l'équation [92] :

$$k_{lmn}=\left(m+\frac{1}{2}\right)\beta+\left(n+\frac{1}{2}\right)\overline{\beta}+2l\pi \quad \text{(II.2.21)}$$

Où l est un nombre entier définissant le nombre de longueurs d'onde le long de l'axe du système.

La cavité à quatre miroirs est schématisée sur la figure 2.13.

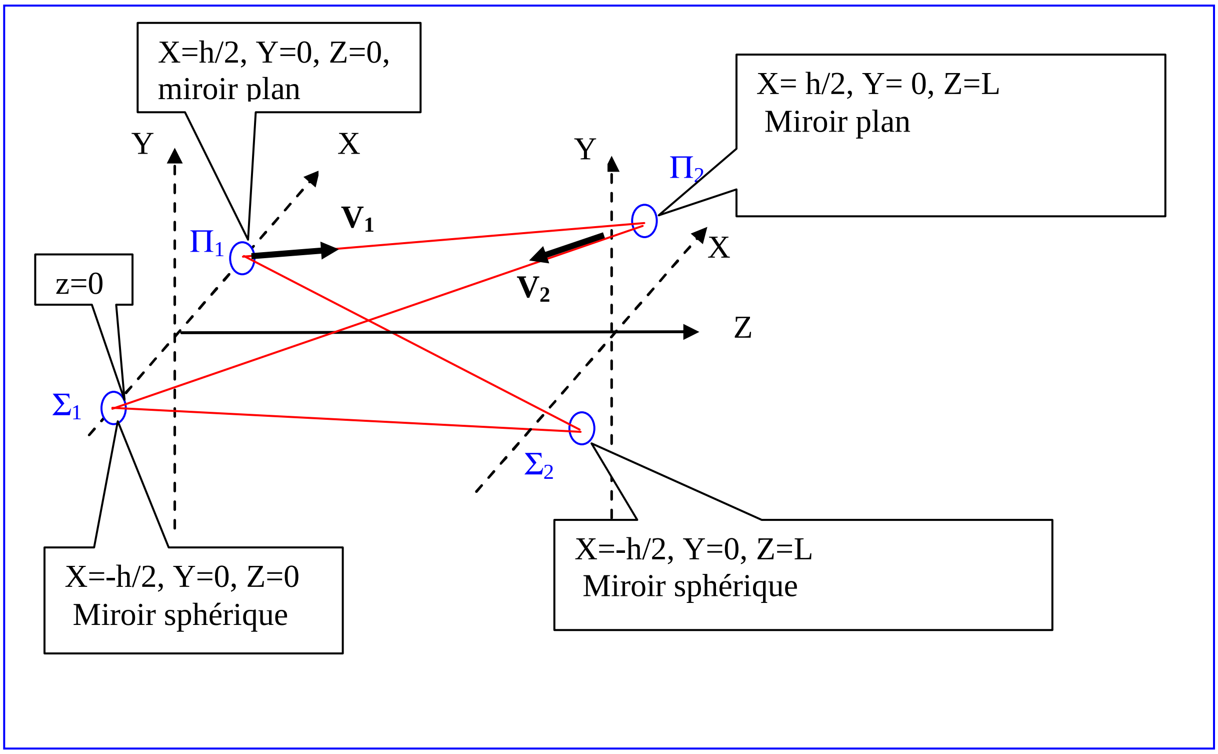


Figure 2.13. Schéma de la cavité à quatre miroirs.

En plus de la figure 2.2. présentée dans la section précédente, nous avons rajouté un angle ϕ pour l'orientation de l'axe reliant les miroirs Π_1 et Σ_2 dans le plan xy. Le référentiel (0, X, Y, Z) est rattaché au référentiel du laboratoire et les axes (x, y, z) sont rattachés au référentiel de la trajectoire, avec z suivant la direction de propagation et x ,y perpendiculaire et parallèle au plan d'incidence (c'est un référentiel tournant). Les notations suivantes sont utilisées : L_1, L_2, L_3, L_4 sont les distances entre Σ_2-Σ_1, Σ_1-Π_1, Π_1-Π_2, Π_2-Σ_1 respectivement. $L= L_1+L_2+L_3+L_4$ est la longueur totale du chemin optique fermé (dans le vide).

La matrice ABCD de la réflexion d'un miroir est définie dans une base correspondant au plan d'incidence : la base est (s_i, p_i k_i) avec s suivant l'axe x_i, p_i suivant l'axe y_i et k_i suivant l'axe z_i. dans cette base on a :

$$M_{Pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{tel que} \quad \begin{pmatrix} x_{i2} \\ y_{i2} \\ x_{i2}' \\ y_{i2}' \end{pmatrix} = M_{pi} \begin{pmatrix} x_{i1} \\ y_{i1} \\ x_{i1}' \\ y_{i1}' \end{pmatrix} \qquad \text{(II.2.22)}$$

La rotation de l'image est prise en compte par le signe moins.

De la même manière, on définit la matrice ABCD pour les miroirs sphériques (voir [94] pour le détail du calcul de cette matrice où des miroirs à surface ellipsoïdale sont considérés). C'est l'équivalent d'une combinaison d'un miroir plan et d'une lentille astigmatique. On obtient :

$$M_{Si} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \dfrac{-2}{R\cos\theta_i} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{2\cos\theta_i}{R} & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{II.2.23}$$

où θ_i est l'angle d'incidence. Cette matrice inclut aussi la rotation de l'image à travers les facteurs -1.

La matrice décrivant le changement de bases entre les coordonnées de deux miroirs successifs est donnée par :

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_{ij} & \sin\alpha_{ij} & 0 & 0 \\ -\sin\alpha_{ij} & \cos\alpha_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha_{ij} & \sin\alpha_{ij} \\ 0 & 0 & -\sin\alpha_{ij} & \cos\alpha_{ij} \end{pmatrix}, \text{ avec } \alpha_{ij} = \operatorname{acos}\left(s_i \cdot s_j\right) \tag{II.2.24}$$

Enfin, la matrice correspondant à une propagation libre de longueur z dans le vide est donnée par :

$$M_{Tz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{II.2.25}$$

Maintenant, en démarrant d'un plan perpendiculaire à l'axe optique, juste avant le miroir 3 (Σ_2 dans la figure 2.13), la matrice ABCD correspondant à un aller-retour est donnée par :

$$\begin{aligned} & M_{RT} = R_{23}M_{TL4}M_{P2}R_{12}M_{TL3}M_{P1}R_{41}M_{TL2}M_{S4}R_{34}M_{TL1}M_{S3} \\ & \Leftrightarrow M_{RT} = M_{TL}R_{23}M_{P2}R_{12}M_{P1}R_{41}M_{S4}R_{34}M_{S3} \end{aligned} \tag{II.2.26}$$

Dans la base liée au miroir 3, la deuxième expression est obtenue en utilisant les propriétés de commutation $[M_T,R] = 0$, $[M_T,M_P] = 0$, $[M_T,M_S] = 0$. Il faut noter que $[M_{S,P},R] \neq 0$ et que $[M_S,M_P] \neq 0$ en 3D ce qui implique une rotation de l'image après un aller-retour. L'angle de rotation de l'image est donné par acos($M_{RT,11}$).

3. Résultats Numériques :

3.1. Cavité planaire 3D

Dans ce qui suit, on présente les résultats du calcul du champ à différentes valeurs de z sur l'axe de propagation. On a utilisé l'expression du champ donnée par l'équation (II.2.2), où le front d'onde *Q(z)* est calculé avec l'équation $Q(z) = \left(C + DQ_0\right)\left(A + BQ_0\right)^{-1}$, où Q_0 est le front d'onde complexe du mode fondamental au plan de départ (z = 0) et A, B, C, D les matrices 2x2 obtenues à partir de la matrice M(z) 4x4 suivante :

$$\begin{cases} M(z) = M_{Tz}M_{S3} \quad \text{pour z entre } \Sigma_1 \text{ et } \Sigma_2 \\ M(z) = M_{Tz}M_{S4}R_{34}M_{T34}M_{S3} \quad \text{pour z entre } \Sigma_2 \text{ et } \Pi_1 \\ M(z) = M_{Tz}M_{P1}R_{41}M_{T41}M_{S4}R_{34}M_{T34}M_{S3} \quad \text{pour z entre} \Pi_1 \text{ et } \Pi_2 \\ M(z) = M_{Tz}M_{P2}R_{12}M_{T12}M_{P1}R_{41}M_{T41}M_{S4}R_{34}M_{T34}M_{S3} \quad \text{pour z entre} \Pi_2 \text{ et } \Sigma_1 \end{cases} \qquad \text{(II.2.27)}$$

Pour calculer les deux waists de l'ellipse du mode fondamental, on diagonalise séparément les parties réelle et imaginaire de Q (z).

Il est à noter que le champ est représenté dans une base différente dans chaque segment de la cavité.

Nous avons pris L = 1 000 mm et deux valeurs extrêmes de h : h =50 mm, h = 500 mm.

Pour h = 50 mm et R = 0,9999L$_1$, le contour de l'intensité du mode fondamental est représenté en fonction de x et z dans la figure 2.14. Sur ce graphique on peut voir que les miroirs plans agissent comme si le plan objet de Σ_2 était envoyé à l'infini, de sorte que le plan image soit dans le plan focal (à mi-distance entre Σ_2 et Σ_1).

Dans la figure 2.15, les waists du faisceau (dans le petit axe et le grand axe de l'ellipse) sont représentés. Les courbes représentent les waists, ils sont situés l'un au-dessus de l'autre à cette échelle de la figure et elles présentent un minimum de 30 µm. Il n'est pas possible de fixer R trop proche de L_1, numériquement cela correspond à une cavité instable.

Les contours de la distribution de l'intensité pour les modes 00, 01, 11 sont représentés dans les figure 2.17., figure 2.18, figure 2.19. Les modes 10, 01, 11 à z = 0 sont présentés dans figure 2.20., figure 2.22., figure 2.21. Les modes 02, 21, 22 sont présentés dans les figure 2.23., figure 2.27., figure 2.26.

On peut voir que les modes excités sont difficiles à distinguer. Il y a une sorte de dégénérescence lorsque la cavité est non planaire.

Avec R = 0,99L_1 (la même valeur pour le cas 2D), les modes sont encore plus dégénérés que dans le cas où **R = 0,9999L$_1$** (voir la figure 2.25., …)

Les mêmes figures sont montrées dans la figure 2.29 et la figure 2.28. pour une cavité planaire.

En passant du cas planaire au non planaire**,** la structure multi piques des modes excités disparaît et mène à des polynômes type Laguerre-Gauss. Il est probable qu'une symétrie cylindrique est ainsi mise en évidence.

3.2. Cavité planaire 2D

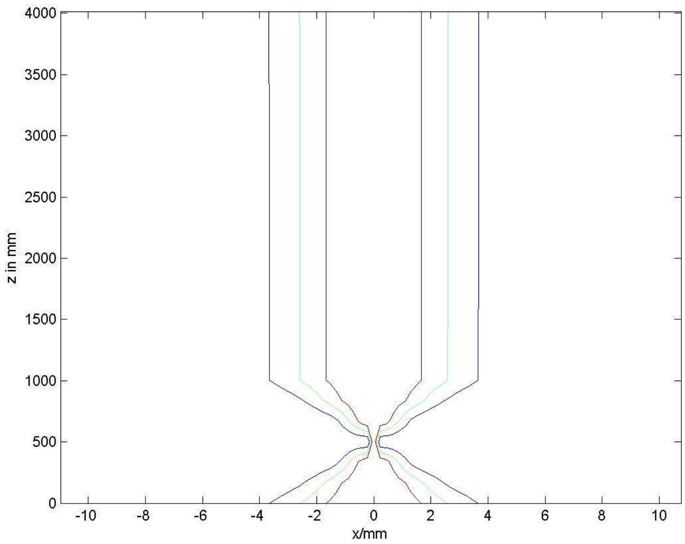


Figure 2.14. h=50mm, phi=pi/2. Vue du profil d'intensité du mode 00 en xz.

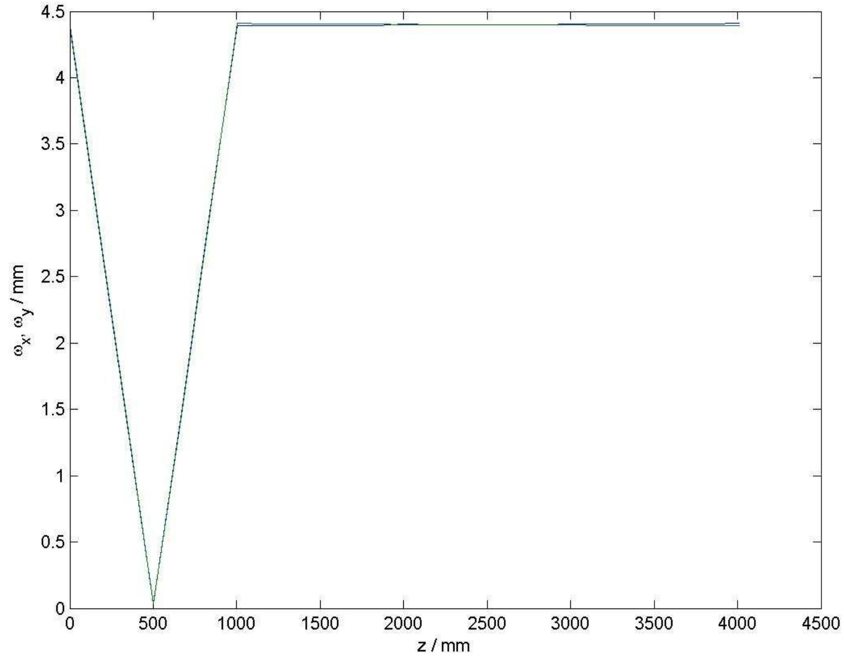


Figure 2.15. h = 50 mm. Waist du faisceau en fonction de z pour une cavité non planaire. Les courbes sont les unes sur les autres.

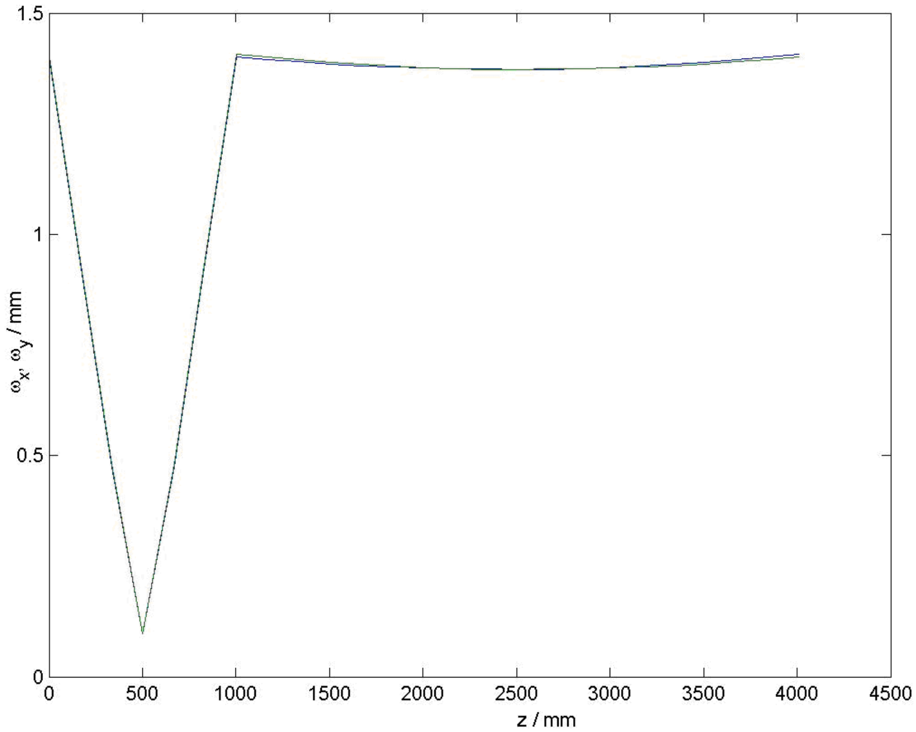


Figure 2.16. Waists du faisceau en fonction de z pour R = 0,99L_1 pour une cavité non planaire. Les courbes sont les unes sur les autres.

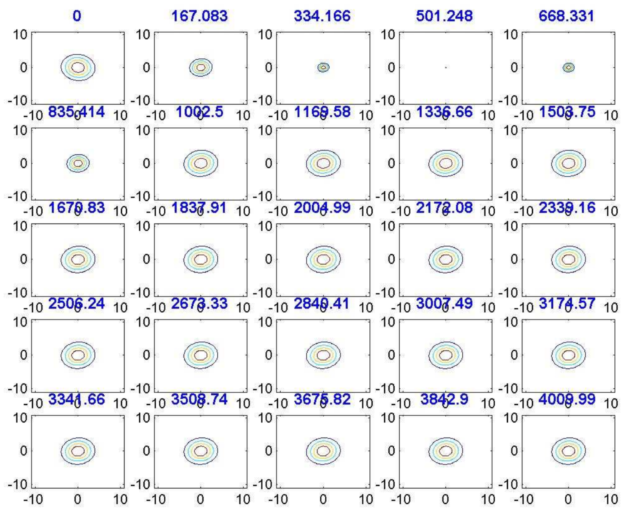


Figure 2.17. Profil d'intensité du mode 00 en fonction de x et y (en mm). h = 50 mm. Pour une cavité non planaire.
Les valeurs de z sont indiquées en bleu.

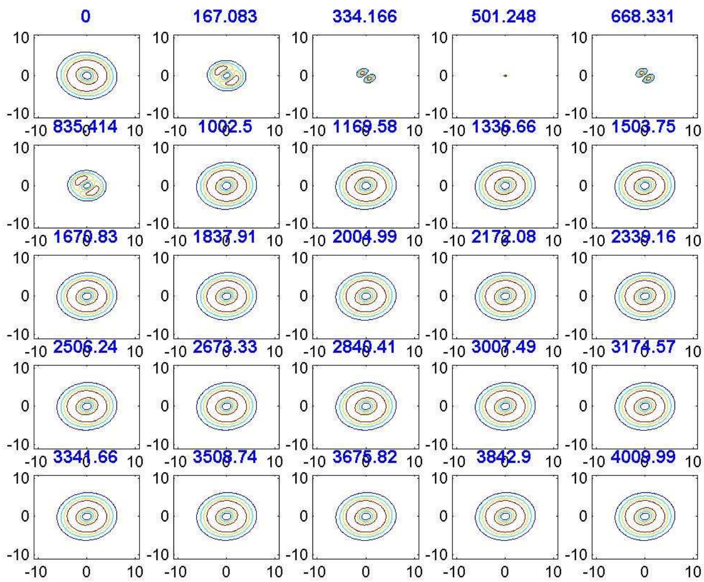


Figure 2.18. Profil d'intensité du mode 01 en fonction de x et y (en mm). h = 50 mm. Pour une cavité non planaire.
Les valeurs de z sont indiquées en bleu.

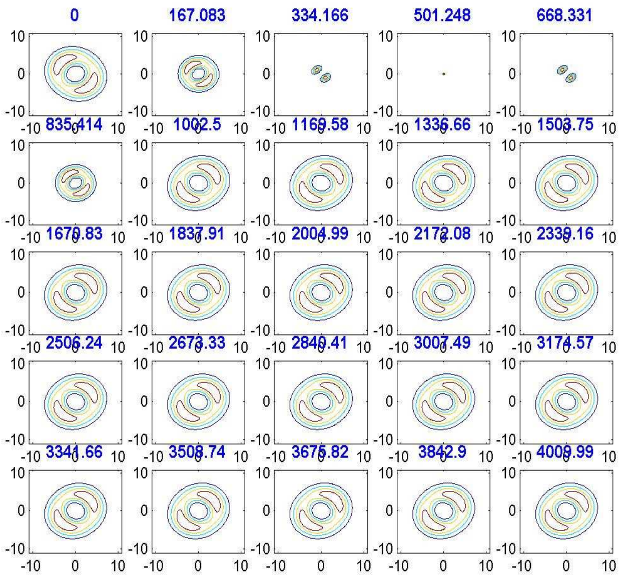


Figure 2.19. Profil d'intensité du mode 11 en fonction de x et y (en mm). Pour une cavité non planaire pour h = 50 mm.
Les valeurs de z sont indiquées en bleu 11.

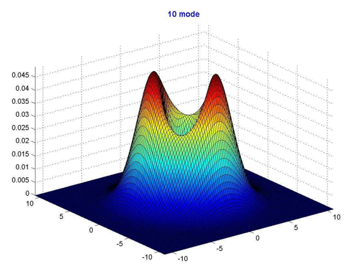


Figure 2.20. h = 50 mm, z = 0, mode 10 d'une cavité non planaire

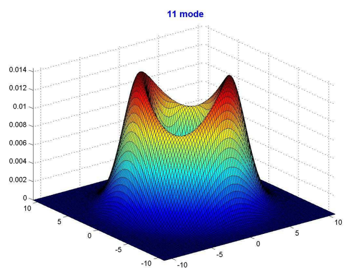


Figure 2.21. h = 50 mm, z = 0, mode 11 d'une cavité non planaire.

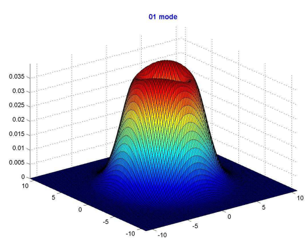


Figure 2.22. h = 50 mm, z = 0, mode 01 d'une cavité non planaire.

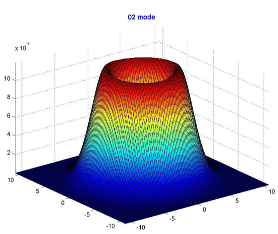


Figure 2.23. h=50mm, z=0, mode 02 d'une cavité non planaire.

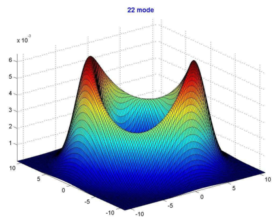


Figure 2.26. h = 50 mm, z = 0, mode 22 d'une cavité non planaire.

.

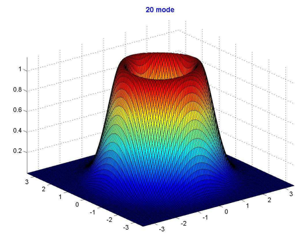


Figure 2.25. h = 50 mm, z = 0, mode 21 pour R = 0,99L$_1$ d'une cavité non planaire.

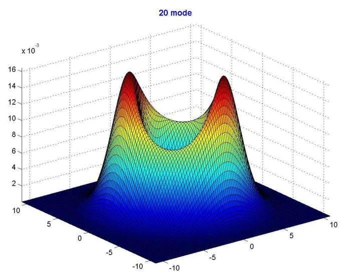


Figure 2.27. h = 50 mm, z = 0, mode 21 d'une cavité non planaire.

.

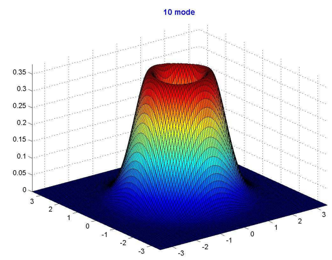


Figure 2.24. h = 50 mm, z = 0, mode 10 pour R = 0,99L$_1$ d'une cavité non planaire.

.

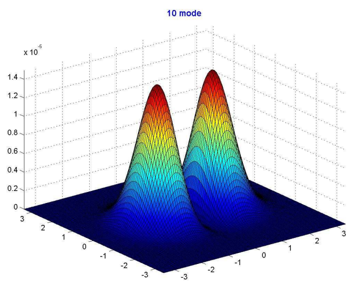


Figure 2.29. h = 50 mm, z = 0, mode 10 pour une cavité planaire.

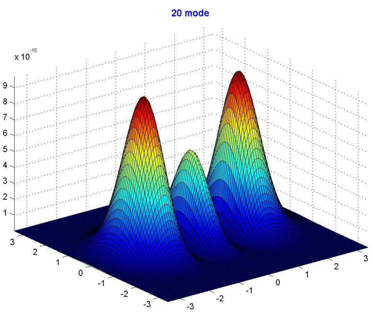


Figure 2.28. h = 50 mm, z = 0, mode 20 pour une cavité planaire.

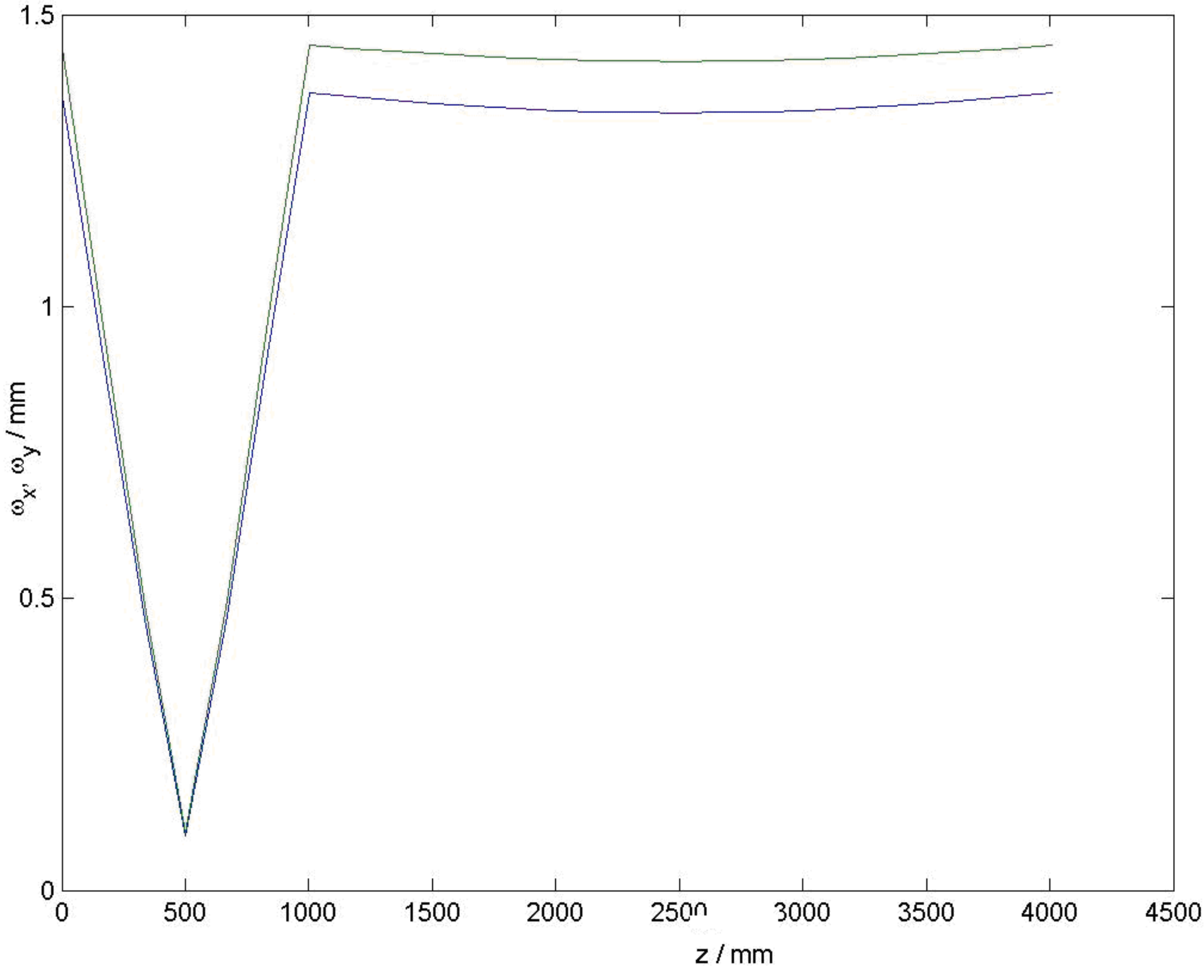


Figure 2.30. Waists du faisceau en fonction de z pour une cavité à 2D. Les 2 courbes correspondent aux deux directions orthogonales (une est dans le plan du chemin optique).

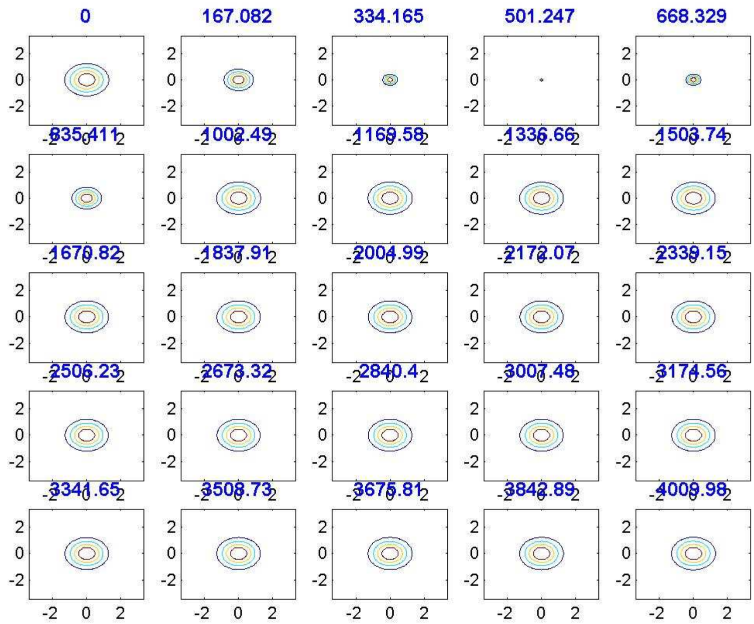


Figure 2.31. Profil d'intensité du mode 00 en fonction de x et y (en mm) d'une cavité à 2D .

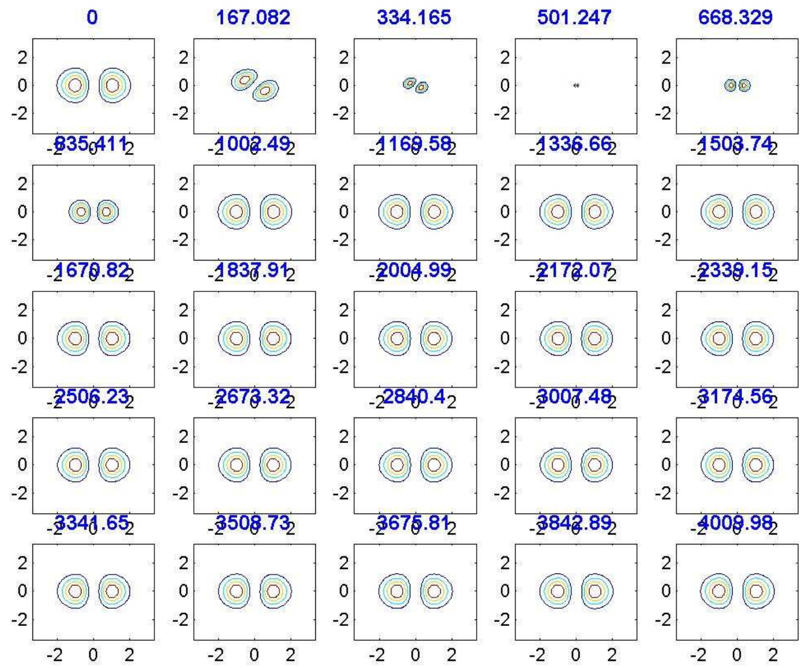


Figure 2.32. Profil d'intensité du mode 01 en fonction de x et y pour une cavité à 2D.

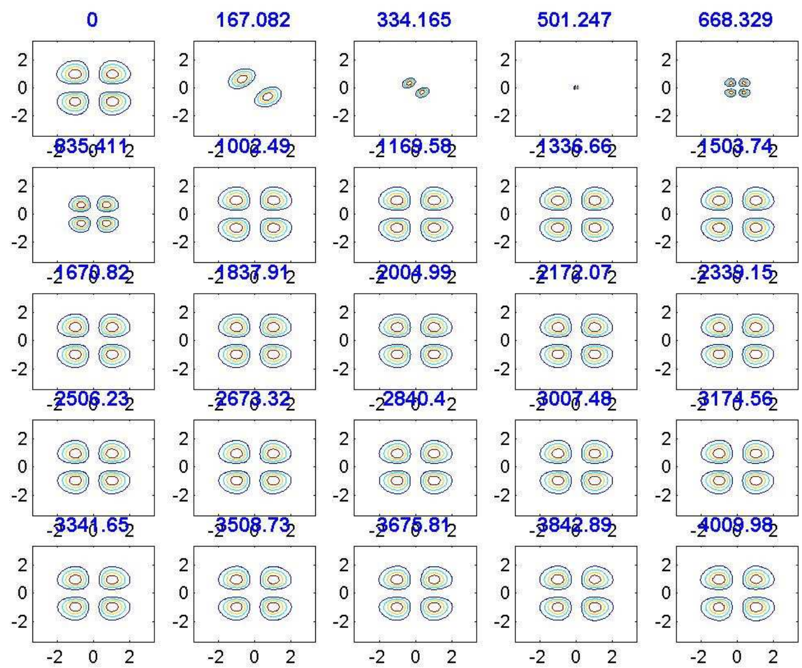


Figure 2.33. Profil d'intensité du mode 11 en fonction de x et y (en mm) pour une cavité à 2D.

Cette étude montre que la cavité à quatre miroirs permet d'avoir des waists très réduits dans les deux configurations 2D et 3D. Les modes de la cavité en 2D sont ceux d'une cavité standard à deux miroirs, cependant les modes de la cavité non planaire sont astigmatiques généralisés. Si l'on associe cette étude à l'étude des tolérances et des instabilités de polarisation, on peut conclure que la cavité à quatre miroirs tétraédriques est une solution très prometteuse pour les deux projets RADIOTHOMX et la source de positrons. Cependant, il faut étudier l'effet de l'ellipticité des modes sur l'interaction Compton avec le faisceau d'électrons.
Les résultats de l'étude théorique des modes vont être vérifiés expérimentalement avec un prototype de cavité à quatre miroirs développé au laboratoire.

III. Calcul de la luminosité

La luminosité est calculée en tenant compte de la divergence du faisceau et de l'astigmatisme généralisé pour les deux configurations 2D et 3D (figure 2.34.) de la cavité avec le faisceau laser entrant dans le tube à vide dans le plan horizontal. La configuration 3D semble être le meilleur choix mais difficile à implémenter et les calculs effectués ci-dessous nécessitent une vérification expérimentale.

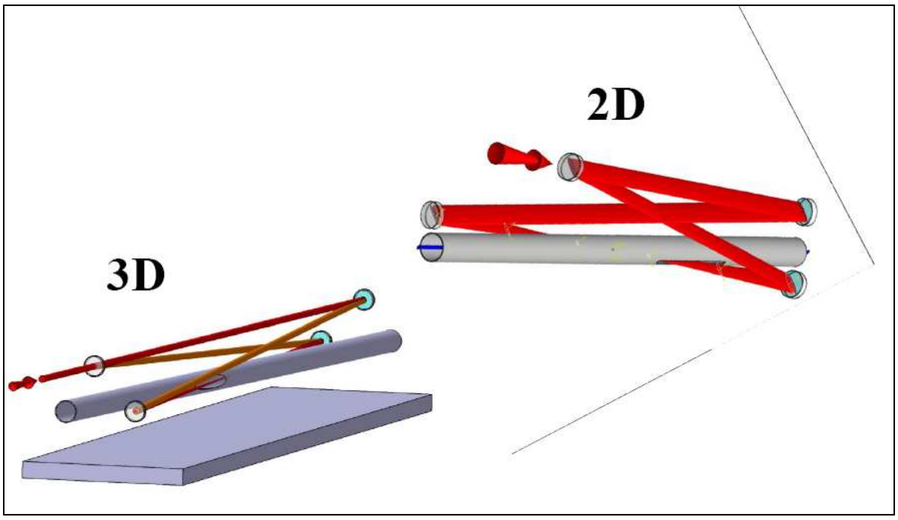


Figure 2.34. Géométrie 2D et 3D de la cavité.

1. Définition de la luminosité :

La luminosité est donnée par la formule :

$$L = 2cBf_{rep}N_1N_2\cos^2\frac{\varphi}{2}\int\iiint f_e(x_e, y_e, z_e, t)dxdydzdt \qquad \text{(II.3.1)}$$

Où φ est l'angle de croisement du faisceau d'électrons et le laser B est le nombre de paquets, f_{rep} est la fréquence de révolution et N_i sont les nombres de particules dans chaque paquet. Les fonctions fi décrivent les distributions espace-temps des pulses. Les coordonnées du faisceau (x_e, y_e, z_e) et (x_l, y_l, z_l) sont reliées au système de coordonnées fixes de l'accélérateur (x, y, z) par :

$$\begin{cases} x_e = x\cos\frac{\varphi}{2} - z\sin\frac{\varphi}{2} \\ y_e = y \\ z_e = x\sin\frac{\varphi}{2} + z\cos\frac{\varphi}{2} \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} x_l = -x\cos\frac{\varphi}{2} - z\sin\frac{\varphi}{2} \\ y_l = y \\ z_l = x\sin\frac{\varphi}{2} - z\cos\frac{\varphi}{2} \end{cases} \qquad (II.3.2)$$

On a :

$$f_e(x_e, y_e, z_e, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sigma_{xe}\sigma_{ye}\sigma_{ze}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x_e^2}{\sigma_{xe}^2} + \frac{y_e^2}{\sigma_{ye}^2} + \frac{(z_e - ct)^2}{\sigma_{xe}^2}\right]\right) \qquad (II.3.3)$$

Et

$$f_l(x_l, y_l, z_l, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\sigma_{zl}\sqrt{\det(kQ_I)}} \exp\left(-kr_l^t Q_I r_l\right) \exp\left(-\frac{(z_e - ct)^2}{2\sigma_{zl}^2}\right) \qquad (II.3.4)$$

Avec $r_l = (x_l, y_l)$.
Pour avoir cette expression, nous avons utilisé le fait que le champ de mode fondamental de la cavité peut être écrit comme :

$$E_l(x_l, y_l, z_l, t) \propto \exp\left(-i\frac{k}{2} r_l^t Q r_l\right) \exp\left(-\frac{(z_e - ct)^2}{2\sigma_{zl}^2}\right), \quad Q = Q_R - iQ_I \qquad (II.3.5)$$

Où

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{q_\eta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{q_\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{C} \qquad (II.3.6)$$

Avec

$$q_\eta^{-1} = \frac{1}{R_\eta} - \frac{2i}{k\omega_\eta^2(z_l)}, q_\xi^{-1} = \frac{1}{R_\xi} - \frac{2i}{k\omega_\xi^2(z_l)} \qquad (II.3.7)$$

Et où les deux axes propres de l'intensité du profil elliptique sont notés par η et ζ. Les deux rayons de courbure du front d'onde sont notés par R_η et R_ζ et les rayons du champ sont notés par $\omega\zeta$ et ω_η.
Maintenant, pour des cavités 2D, nous avons Im(α) = 0, ce qui signifie que les matrices Q, Q_R et Q_I ont des vecteurs propres réels (elles ont en effet, les mêmes bases de vecteurs propres, et cela signifie que les plans tangentiel et sagittal peuvent être découplés comme c'est connu en optique paraxiale ABCD).
Ce n'est pas le cas pour les cavités en 3D où les vecteurs propres de Q sont complexes alors que ceux de Q_I sont réels (les valeurs propres sont, elles aussi, réelles) lorsque le résonateur est stable. Cela veut dire que, dans ce cas, Im(α) ≠ 0 et que les axes de l'ellipse du profil de l'intensité tourne (cf. Kogelnik & Arnaud 1969). En 3D, on peut toujours définir :

$$Q_I = \begin{pmatrix} \cos\alpha_I & \sin\alpha_I \\ -\sin\alpha_I & \cos\alpha_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{k\omega_{\eta I}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k\omega_{\xi I}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha_I & -\sin\alpha_I \\ \sin\alpha_I & \cos\alpha_I \end{pmatrix}, \alpha_I \in \mathbb{C} \qquad (II.3.8)$$

Avec $\omega_{\eta I} \neq \omega_\eta$, $\omega_{\zeta I} \neq \omega_\zeta$, les déviations standard du spot de l'intensité elliptique gaussienne sont $\sigma_\eta = {\omega_{\eta I}}/{2}$ et $\sigma_\xi = {\omega_{\xi I}}/{2}$ de manière à ce que, dans le système d'axes η, ζ, l'intensité s'écrive :

$$f_l\left(x_\eta, x_\xi\right) = \frac{1}{2\pi\sigma_\eta\sigma_\xi}\exp\left(-\frac{x_\eta^2}{2\sigma_\eta^2} - \frac{x_\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right) \tag{II.3.9}$$

Mais avec $\sigma_\eta = \sigma_\eta\left(z_l\right)$ et $\sigma_\xi = \sigma_\xi\left(z_l\right)$ et avec des axes tournants $\left[\eta\left(z_l\right), \xi\left(z_l\right)\right]$.

En utilisant :

$$\frac{1}{\sigma_{ze}\sigma_{zl}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\left(z_e - ct\right)^2}{2\sigma_{ze}^2} - \frac{\left(z_e - ct\right)^2}{2\sigma_{zl}^2}\right)dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{c}\frac{1}{\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{\sigma_{ze}^2 + \sigma_{zl}^2}}\exp\left(-\frac{2z^2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\sigma_{ze}^2 + \sigma_{zl}^2}\right) \tag{II.3.10}$$

Et en intégrant sur t, on obtient finalement :

$$L = \frac{Bf_{rep}N_1N_2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{ze}^2 + \sigma_{zl}^2}}\iiint\frac{1}{\sigma_{xe}\sigma_{ye}\sqrt{\det\left(kQ_I\right)}}\exp\left(kr_l^tQ_Ir_l\right)\exp\left(-\frac{x_e^2}{\sigma_{xe}^2} - \frac{y_e^2}{\sigma_{ye}^2} - \frac{2z^2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\sigma_{ze}^2 + \sigma_{zl}^2}\right)dxdydz \tag{II.3.11}$$

Il faut noter que $Q_I \equiv Q_I\left(z_l\right), \sigma_{xe}\left(z_e\right) = \sqrt{\varepsilon_{xe}\beta_{xe}(z_e)}, \sigma_{ye}\left(z_e\right) = \sqrt{\varepsilon_{ye}\beta_{ye}(z_e)}$. La future cavité à ATF est située entre les coordonnées 36 et 38 de la figure 2.35. Les variations de $\beta(s)$ sont très petites et $\varepsilon_{xe} \approx 10^{-9}\,m\,rad, \varepsilon_{xe} \approx 10^{-11}\,m\,rad$.

Par conséquent, on assume $\sigma_{xe}\left(z_e\right) \equiv \sigma_{xe} \approx 160\,\mu m, \sigma_{ye}\left(z_e\right) \equiv \sigma_{ye} \approx 8\,\mu m$ dans l'intégrale (ces facteurs peuvent varier d'un facteur $2^{1/2}$). Ce n'est pas le cas des composantes de Q_I.

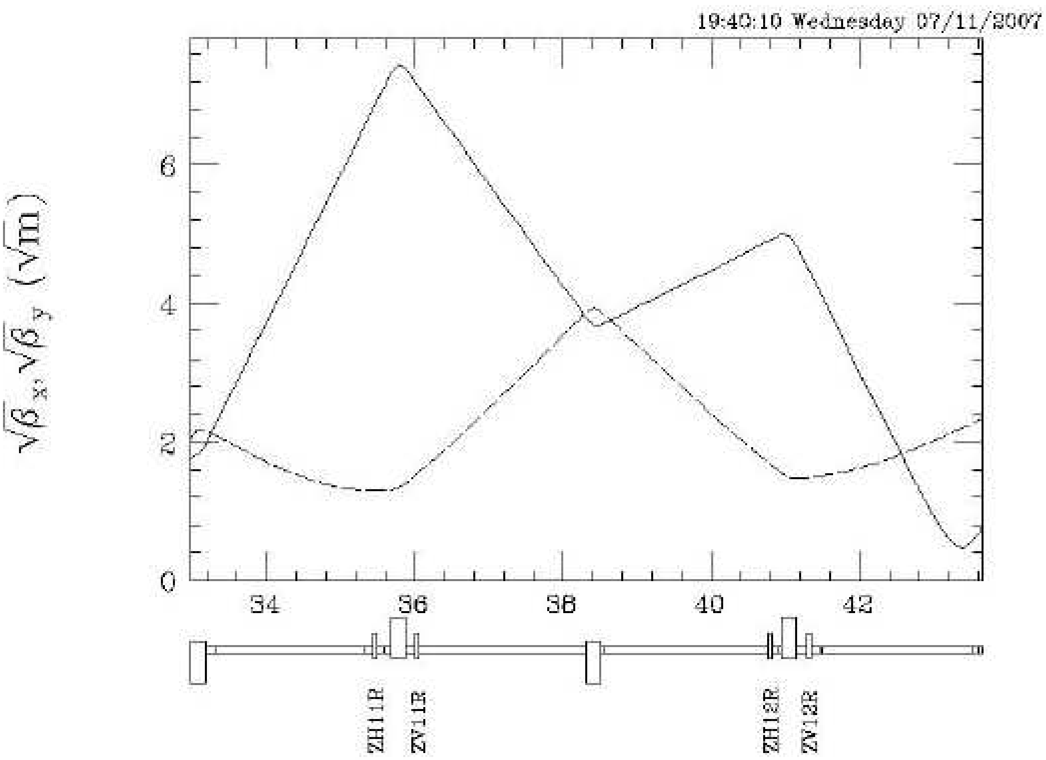


Figure 2.35. Fonction β(s) en fonction de la distance.

L'expression finale de la luminosité est donnée par :

$$L = \frac{Bf_{rep}N_1N_2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_{xe}\sigma_{ye}\sqrt{\sigma_{ze}^2+\sigma_{zl}^2}}\iiint\frac{1}{\sqrt{\det(kQ_I)}}\exp\left(kr_l^tQ_Ir_l\right)\exp\left(-\frac{x_e^2}{\sigma_{xe}^2}-\frac{y_e^2}{\sigma_{ye}^2}-\frac{2z^2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\sigma_{ze}^2+\sigma_{zl}^2}\right)dxdydz \text{ (II.3.12)}$$

On ne peut pas intégrer sur y car la projection en 2D du profil de l'intensité du laser est une ellipse qui tourne autour de l'axe z_l (cf. figure 2.36.), la forme du mode 02 est représentée sur la figure 2.37.).

Comme :

$$(x_e,y_e,z_e)^t = O_e(x,y,z)^t \text{ et } (x_l,y_l,z_l)^t = O_l(x,y,z)^t \Rightarrow (x_e,y_e,z_e)^t = O_eO_l^{-1}(x_l,y_l,z_l)^t \text{ (II.3.13)}$$

Avec O_i des matrices de rotations 3x3 ainsi $dxdydz = dx_l dy_l dz_l$, nous allons donc intégrer sur les variables du laser.

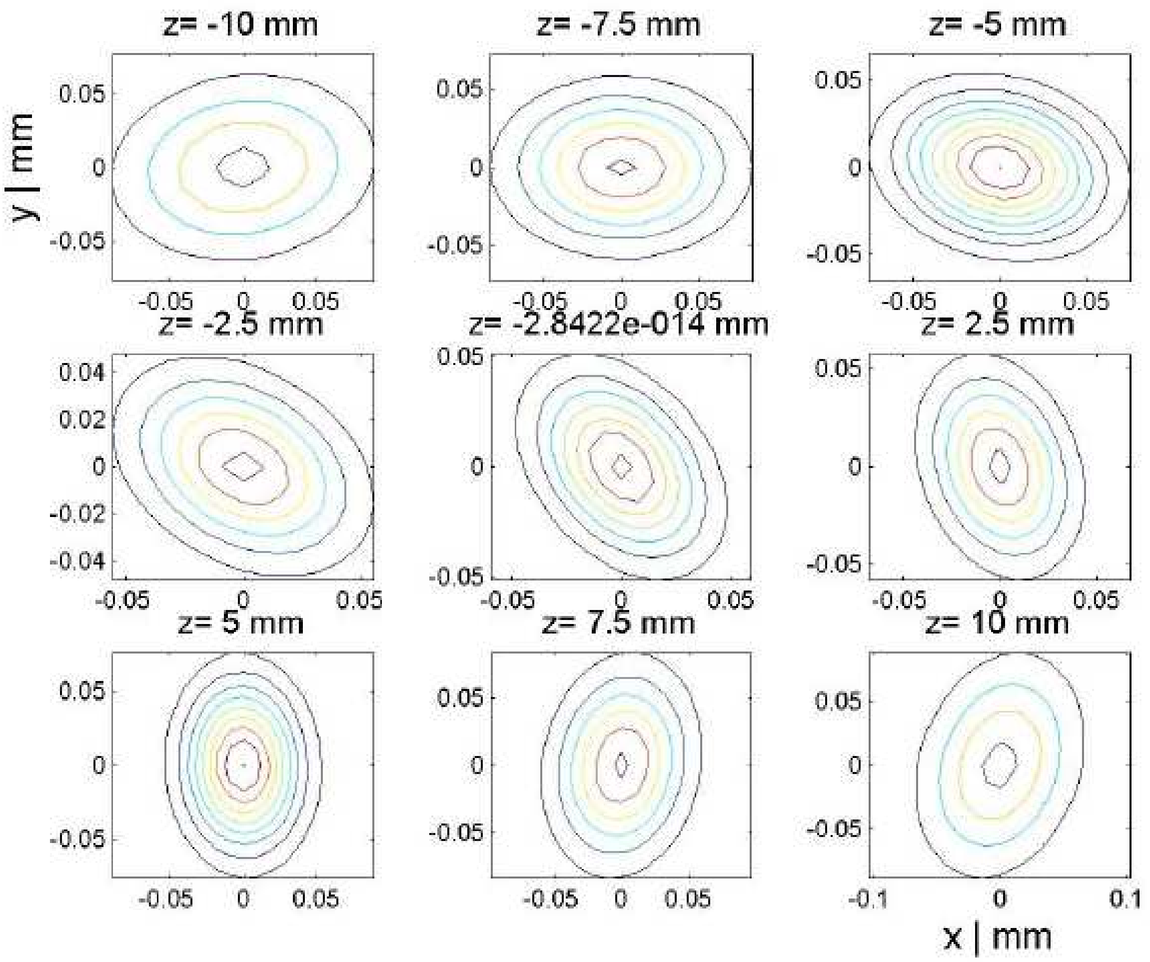


Figure 2.36. Contour du profil d'intensité laser pour une cavité 3D de 178,5 MHz de fréquence à différentes positions z près du centre de la cavité z = 0. Les rayons de courbure des miroirs sont de 500 mm, la distance entre les miroirs plans et sphériques est de 70.

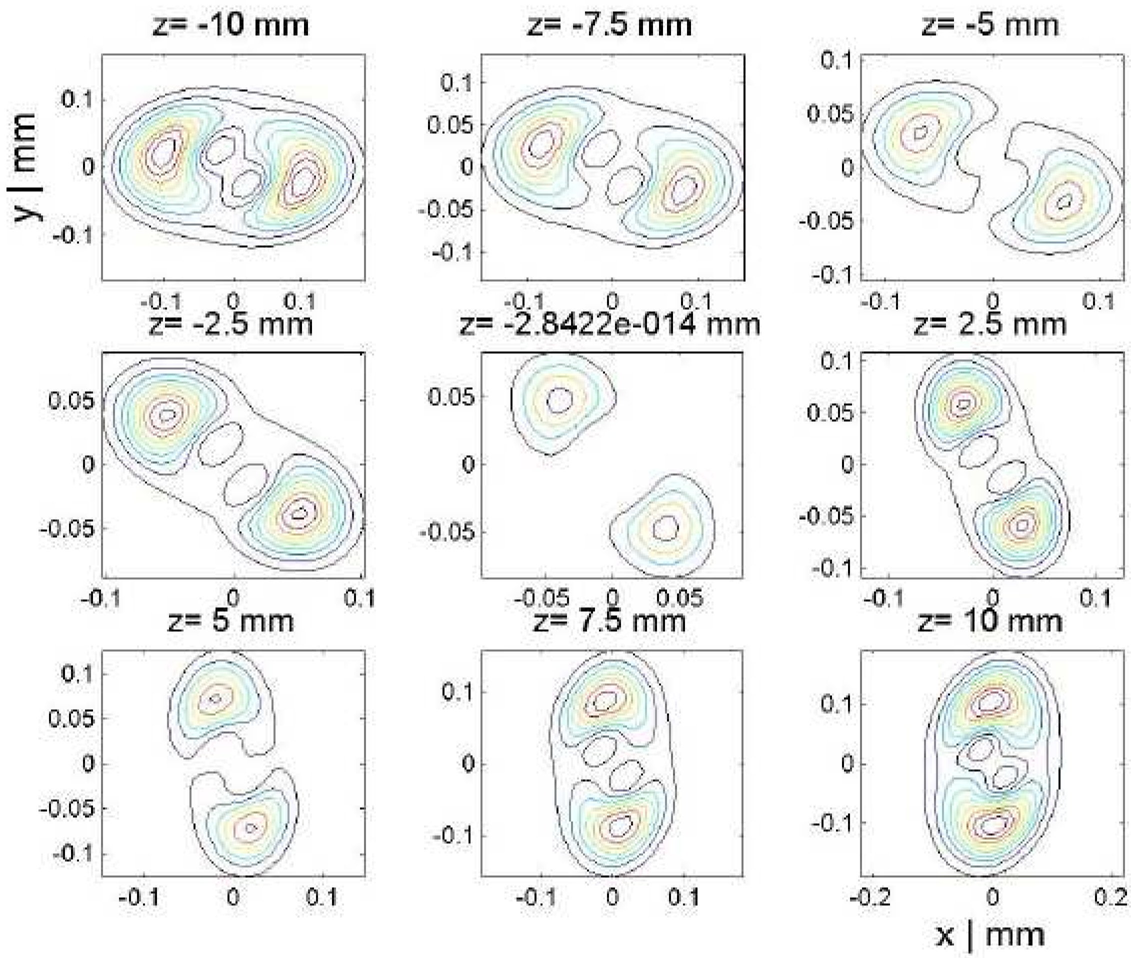


Figure 2.37. Contour du profil d'intensité laser pour une cavité 3D de 178,5 MHz de fréquence à différentes positions z près du centre de la cavité z = 0. Les rayons de courbure des miroirs sont de 500 mm, la distance entre les miroirs plans et sphériques est de 70. Pour le mode 02.

II] calculs dans le cas 3D

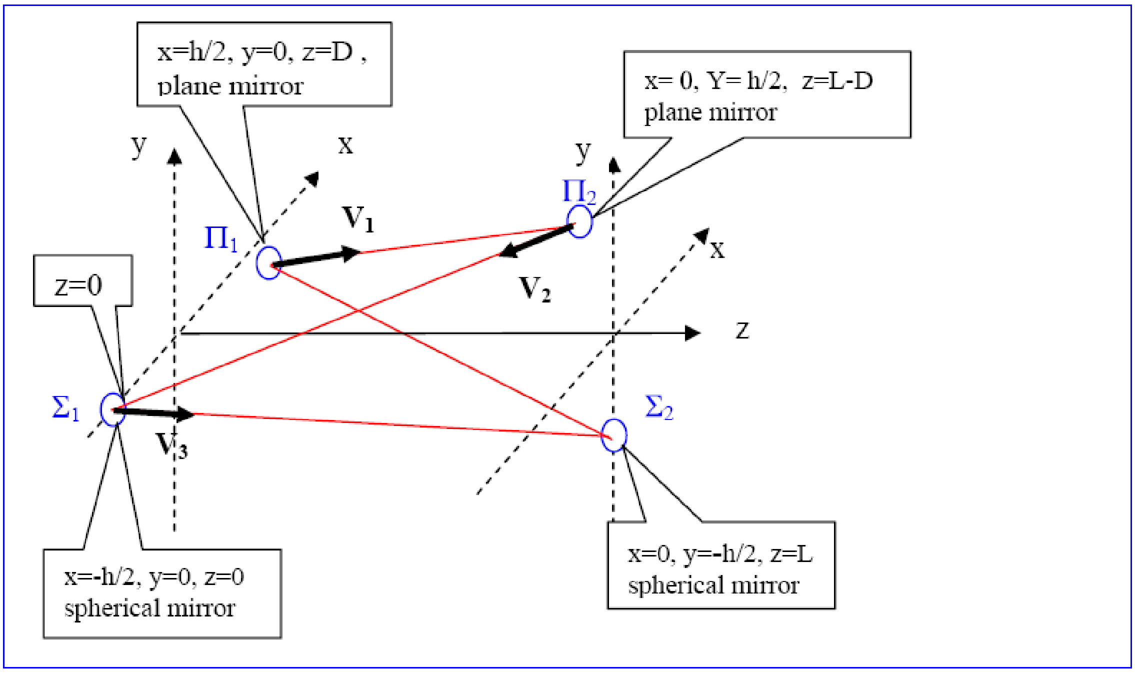


Figure 2.38 Schéma simplifié de la cavité à quatre miroirs

La cavité est représentée sur le schéma simplifié ci-dessus : la distance D est le paramètre libre lorsque la distance h est fixée par les contraintes mécaniques et lorsque les rayons de courbures des miroirs R sont fixés (et supposés être les mêmes). La longueur totale d'un aller-retour doit être de c/178,5 MHz cela implique un chemin optique total dans la cavité de 1,6 m.

Géométrie : h = 100 mm, R = 500 mm
Numériquement, les waists minimum sont donnés par L = R-3,96 mm (voir la figure 2.39. ci-dessous).
La figure 2.40. montre le contour du profil 2D du faisceau laser entre les deux miroirs sphériques et au point d'interaction laser/électron (z = 0 sur la figure correspond à la mi-distance entre les deux miroirs sphériques), et le profil du faisceau d'électrons vu du système de référence du faisceau laser.
Note : on a appliqué une rotation de 39° du résonateur optique pour avoir le profil vertical de l'ellipse pour le faisceau laser sur la figure 2.40. En effet, le plan de référence (*x*,*y*,*z*) lié au laser est défini perpendiculaire au plan défini par $\mathbf{V_2}$ et $\mathbf{V_3}$ dans la figure ci-dessus. Sans cette rotation, le profil du faisceau est représenté sur la figure à la fin de cette section (figure 2.43.).

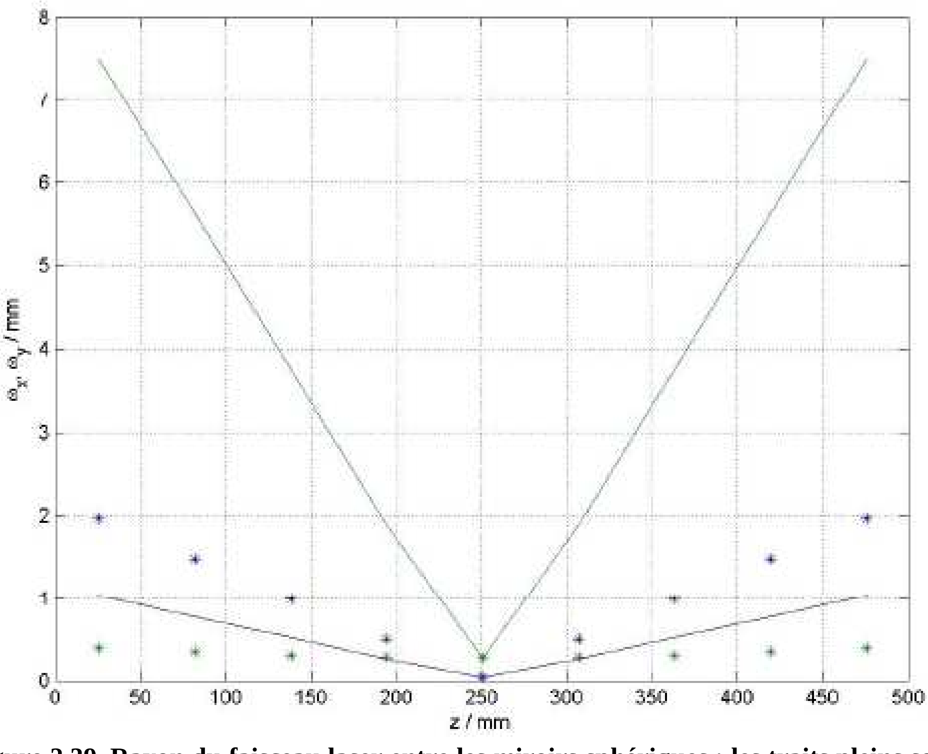


Figure 2.39. Rayon du faisceau laser entre les miroirs sphériques : les traits pleins sont les résultats de calculs en 3D, les étoiles correspondent à la formule paraxiale standard $\omega(z) = \omega_0\sqrt{1+\left(z/z_R\right)^2}$ **qui n'est pas valable en 3D.**

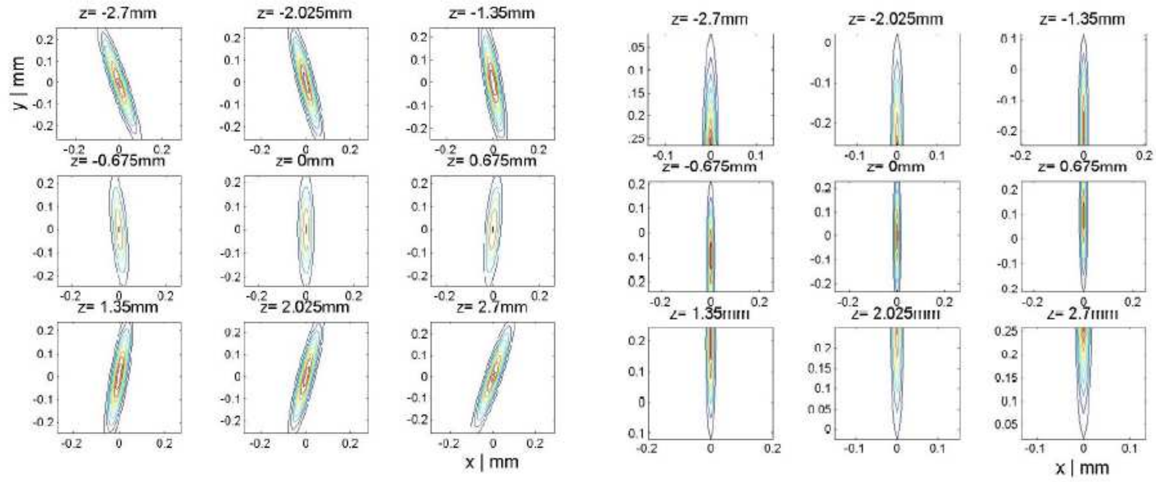


Figure 2.40. Intensité du faisceau laser (à gauche) et du faisceau d'électrons, vue des axes du faisceau laser (à droite) près du point d'interaction.

Le profil de l'intensité du faisceau laser est montré sur la figure 2.41. pour un intervalle de propagation plus large. Sur ce graphique, on constate qu'on peut entrer latéralement dans le tube faisceau d'ATF et recouvrir l'ellipticité du faisceau d'électrons en utilisant la rotation naturelle des modes de la cavité 3D.
La figure 2.42. montre le facteur géométrique défini par :

$$L_G(z) = \frac{\frac{dL}{dz}}{Bf_{rep}N_1N_2}$$
$$= \left(\frac{Bf_{rep}N_1N_2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{ze}^2+\sigma_{zl}^2}} \iint \frac{1}{\sqrt{\det(kQ_I)}} \exp\left(kr_l^t Q_I r_l\right) \exp\left(-\frac{x_e^2}{\sigma_{xe}^2} - \frac{y_e^2}{\sigma_{ye}^2} - \frac{2z^2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{\sigma_{ze}^2+\sigma_{zl}^2} \right) dxdy \right) \Delta z$$

(II.3.14)

qui est la quantité qui apparaît lorsque la luminosité est calculée numériquement. Le facteur géométrique de la luminosité est finalement donné par $L_G = \sum_{i=1}^{N} L_G(z_i)$.

À partir de la figure 2.40., figure 2.41. et figure 2.42., on peut voir que le faisceau ne tourne presque pas aux alentours de la région de recouvrement du faisceau laser et du faisceau d'électrons. Mais l'ouverture est dans la fausse direction ! Le rayon du tube faisceau est de 27,2 *mm*, donc le faisceau se propage sur une distance de 27,2/(sinφ) ≈ 97,72 *mm* du point d'interaction avant d'entrer dans l'ouverture du tube. En regardant la figure 2.39, on peut voir que le rayon du champ du laser est de 3 *mm* ce qui dépasse la demi-largeur de la fente du tube.

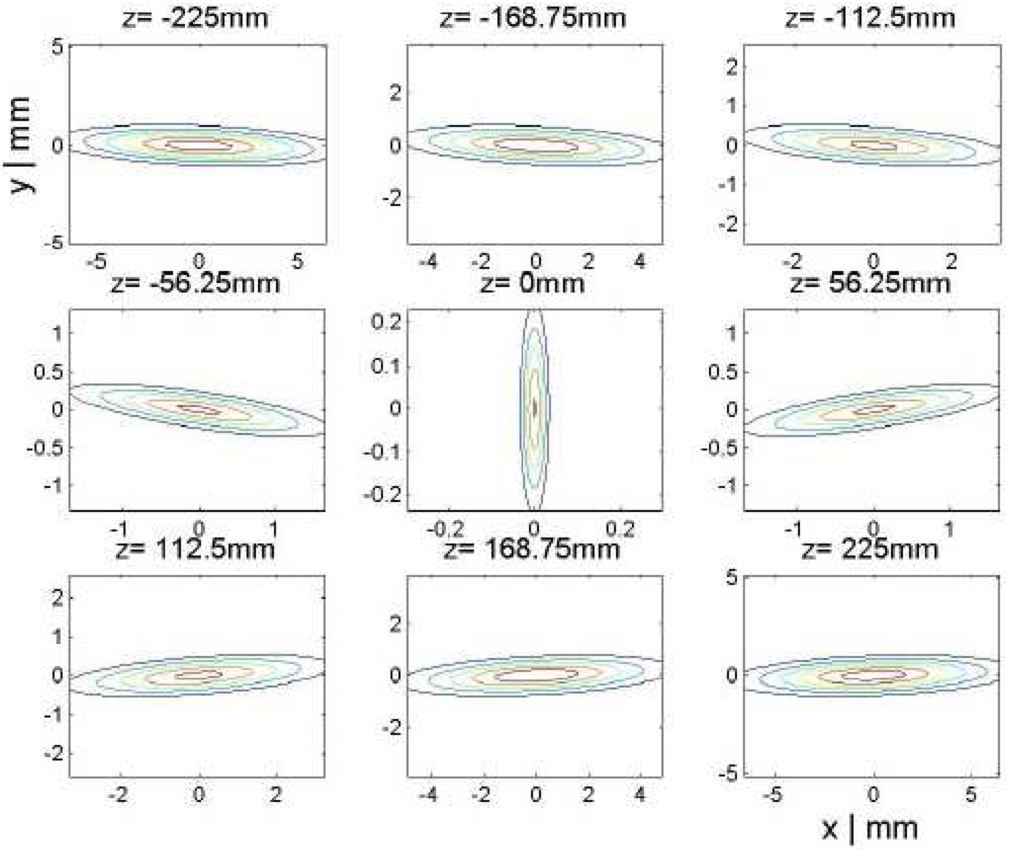


Figure 2.41 . Intensité du faisceau laser pour un une distance z plus large

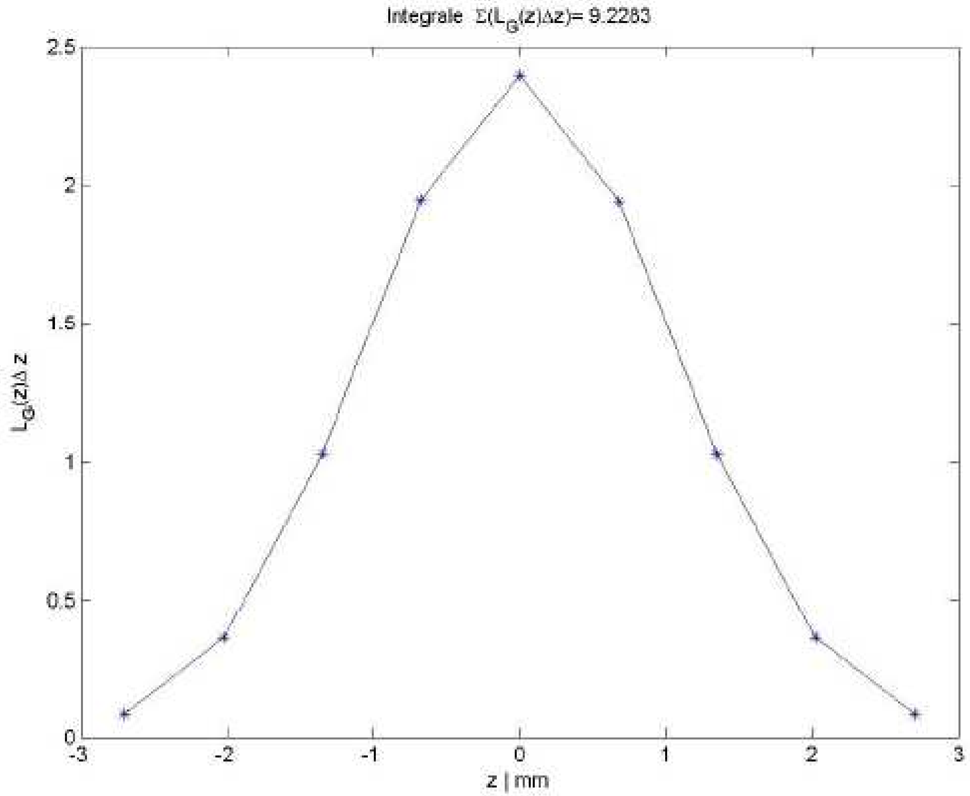


Figure 2.42. Variation du facteur géométrique de la luminosité en fonction de z.

On peut essayer de tourner la cavité entière pour tourner l'ellipse du faisceau. Le profil du faisceau et la luminosité sont représentés sur la figure 2.43., pour un profil tourné d'intensité du laser. Le facteur de luminosité est 3 à 4 fois plus petit dans ce cas particulier.

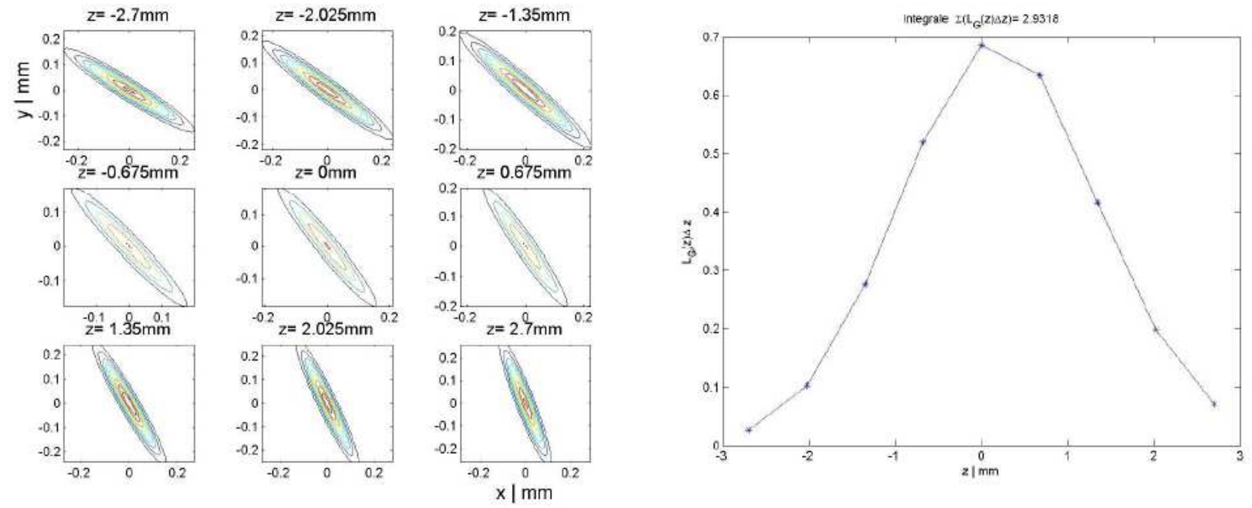


Figure 2.43. Mêmes figures que celles ci-dessus mais pour une ellipse du faisceau laser tournée de -39,57° autour de z.

Dans le cas précédent, où l'on a posé L = R-3,96 ; on a par conséquent, joué sur la distance entre les deux miroirs sphériques pour réduire le rayon du champ dans la fente du tube faisceau. Dans la figure 2.44., on peut voir que pour L = R-2,96 mm le rayon du champ est suffisamment petit dans la fente. Les facteurs géométriques de la luminosité sont calculés pour deux orientations de l'ellipse et pour plusieurs valeurs de L et sont présentés dans le tableau suivant :

R-L (mm)	3.96		2.96		1.96	
Orientation de l'ellipse	0°	90°	0°	90°	0°	90°
WAISTS (µm)			76 61	61 76	70 80	80 70
L_G(mm^{-2})	9.2	1.95	7.7	6.3	6.8	6.1

Comme le rayon du champ large est compatible avec la largeur de la fente, la configuration la plus favorable est colorée en gris dans le tableau ci-dessus. Il est encore possible d'optimiser la valeur pour R-L, mais une étude expérimentale est nécessaire pour valider les calculs.

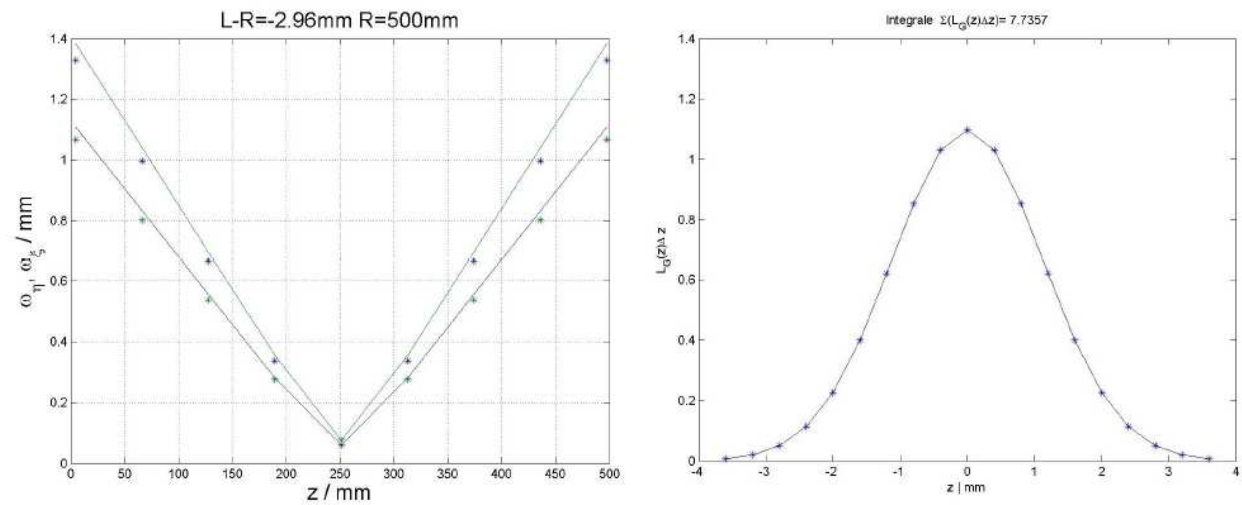


Figure 2.44. Rayon du faisceau pour L-R-2,96 mm.

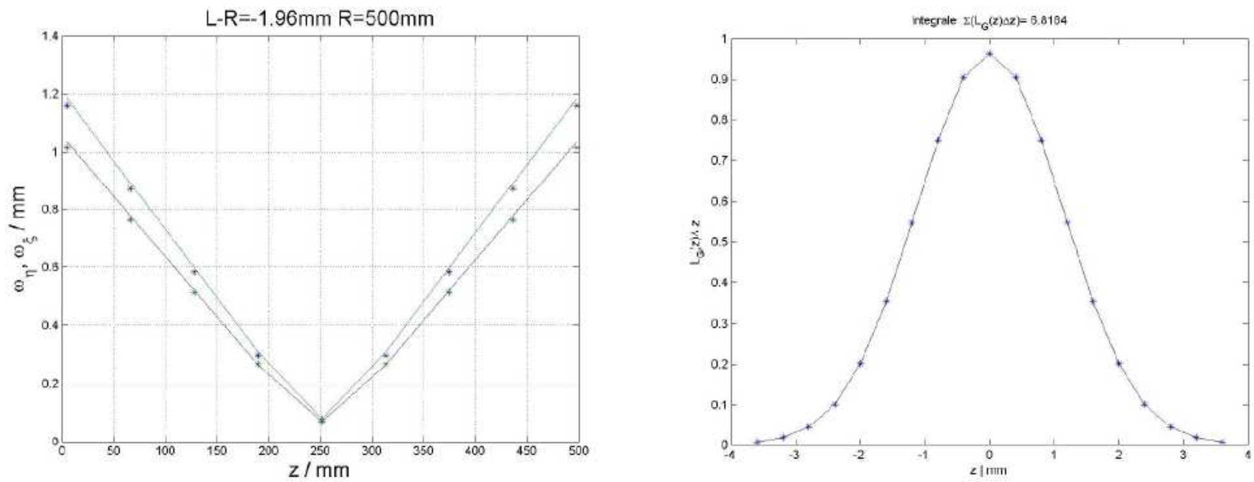


Figure 2.45. Rayon du faisceau pour L-R=-1,96 mm.

Pour L = R-2,96 mm, le contour du faisceau est donné dans la figure 2.46.

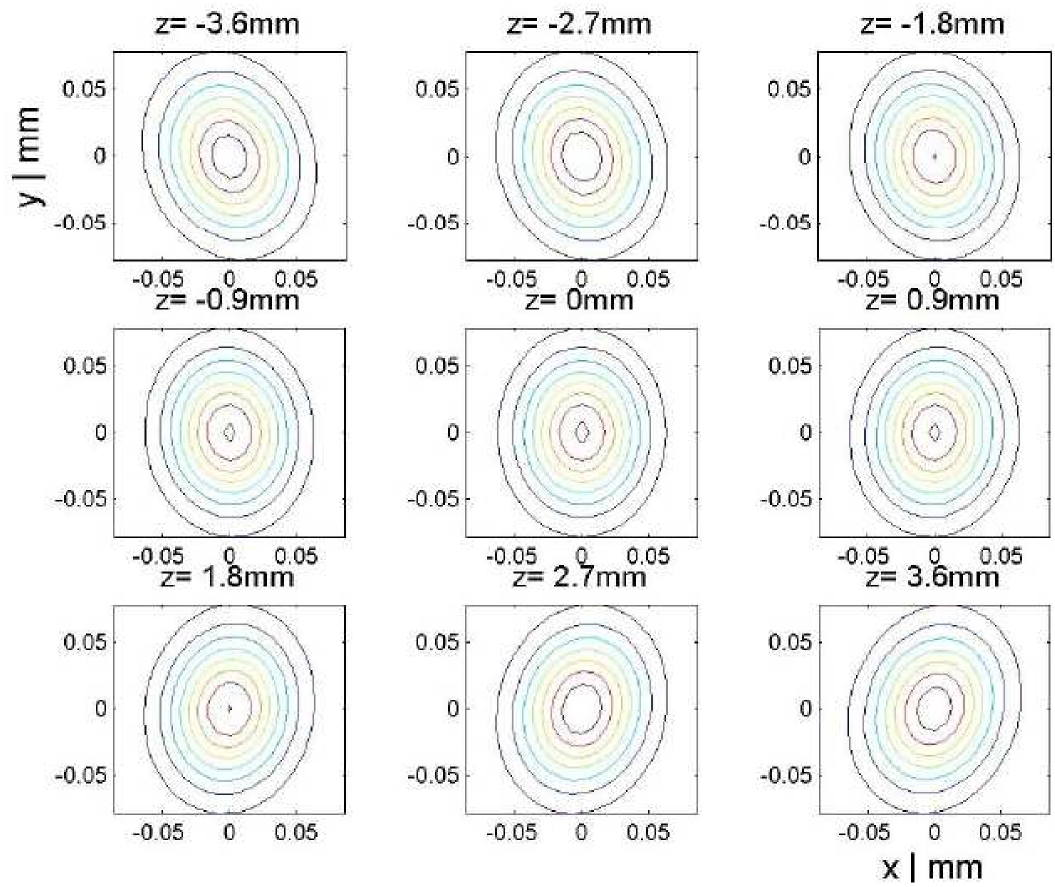
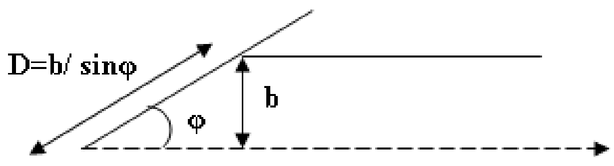


Figure 2.46. Contour du profil du faisceau pour L=R-2,96 mm.

III] Etude Numérique dans le cas 2D :

Les paramètres de la partie ci-dessus sont gardés h = 100 mm et R = 500 mm, mais maintenant la cavité planaire est située dans le plan vertical. Pour le calcul, on utilise le même code Matlab que pour le cas 3D (mais pour une géométrie 2D) et un code plus simple et plus rapide basé sur le formalisme des matrices ABCD (qui reste valable pour au cas paraxial 2D). Dans le cas 2D, on peut simplement définir la plus petite taille acceptable w_0 du faisceau laser conduisant à une taille du faisceau laser qui convienne à la fente du tube faisceau. Nous avons défini le rayon maximal du faisceau dans la fente par la relation nw (D) = $\Delta_{\text{fente}}/2$, où l'on a fixé n = 3 (qui est le rayon à 6 sigmas du profil de l'intensité du faisceau dans la fente) et où Δ_{fente} = 5 mm est la largeur maximale de la fente.

$$w(D) = w_0 D / z_R \Rightarrow w_0 = \frac{2n\lambda b}{\pi\Delta_{fente}\sin\varphi}$$



Rayon de la fente du tube: b= 27.2/2 mm

Selon cette contrainte, pour un angle de croisement φ = 8°, on obtient $w_{0\max}$ = 39 µm pour λ = 1 030 nm.

Le tableau ci-dessous, montre le facteur géométrique de la luminosité pour différentes configurations : le cas de l'incidence normale, le cas d'une interaction dans le plan vertical et le facteur géométrique de la luminosité avec et sans divergence du faisceau laser. On voit que la divergence du faisceau laser n'a presque pas d'effet pour un angle de croisement de 8° et qu'une interaction verticale est le pire des cas.

	Plan d'interaction horizontale					Plan d'interaction verticale
	Cavité dans le plan horizontal			Cavité dans le plan vertical		Cavité dans le plan horizontal
L-R (mm)	3,535	3,735		3,535	3,735	3,535
φ (°)	8	8	0	8		8
w_{0x} (μm) w_{0y} (μm)	16,4 90,5	**38** **91,1**		90.5 16,4	**91,1** **38**	16,4 90,5
L_G avec divergence (mm^{-2})	16,9	**11,5**	37,6	5,34	**5,29**	1,54
L_G sans divergence (mm^{-2})	21,4	**11.8**	46,9	5,32	**5,29**	1,54

Le meilleur choix correspond à la troisième colonne du tableau ci-dessus. C'est approximativement un facteur 1,2 meilleur que le meilleur cas en 3D étudié dans la section précédente. Mais la mise en œuvre géométrique est difficile car elle exige trois fentes dans le tube du faisceau. Dans la sixième colonne, une cavité 2D plus simple est considérée et conduit à un plus petit facteur de luminosité géométrique que dans le cas 3D. La cavité 3D semble être la meilleure mais elle risque de ne pas être facile à mettre en œuvre et les calculs effectués ici doivent être testés expérimentalement.

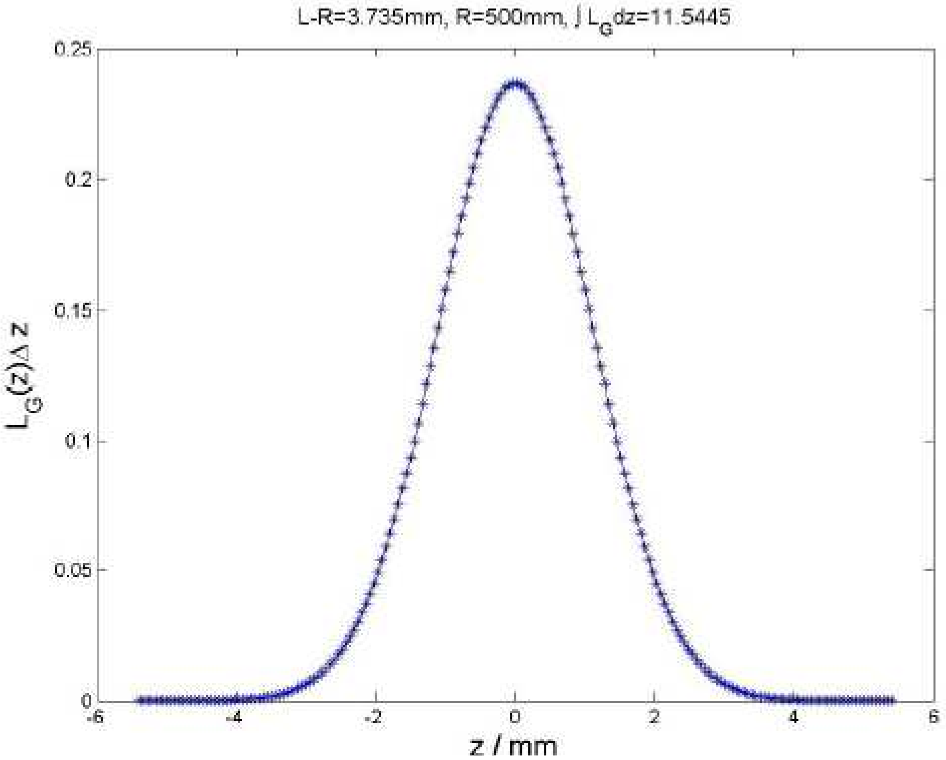


Figure 2.47. Facteur géométrique pour L-R= 3.735 *mm* , R=500 *mm*

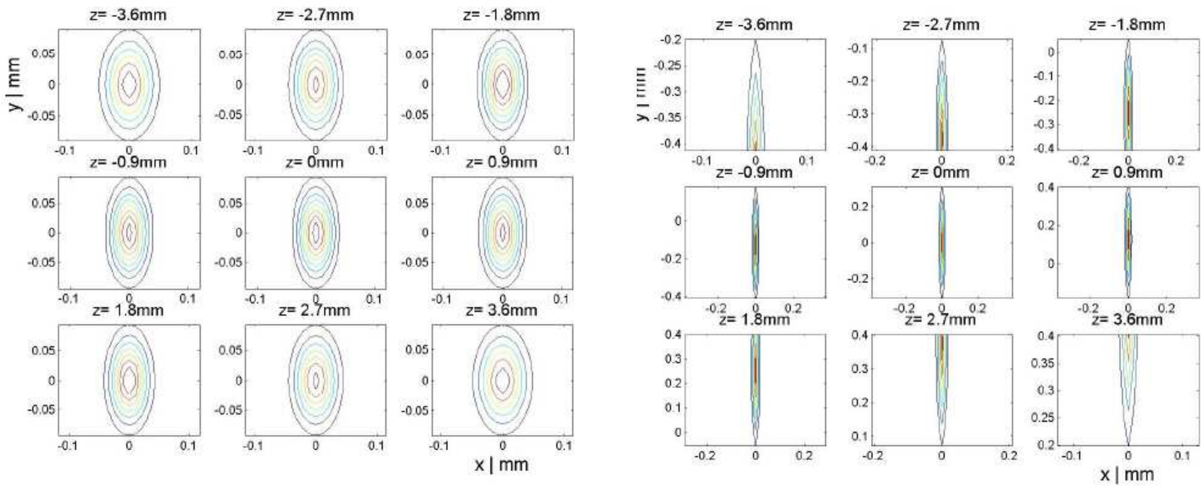


Figure 2.48. Intensité du faisceau laser (à gauche) et profil du faisceau d'électrons, vu des axes du faisceau laser (à droite) près du point de collision électron-laser pour un intervalle z plus large.

Chapitre 3. Cavité à quatre miroirs : Partie expérimentale

Dans le chapitre précédent, en calculant les tolérances mécaniques de la cavité à quatre miroirs ainsi que la taille du waist, nous avons mis en évidence l'avantage d'utiliser ce genre de cavités pour les deux projets RADIOTHOMX et la source de positrons polarisés de l'ILC. Puis nous avons présenté une étude théorique des modes d'une cavité à quatre miroirs planaire (2D) et non planaire (3D).

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la partie expérimentale du travail. Le but de l'expérience est de tester les modes calculés théoriquement et de vérifier que l'on peut réaliser des waists très réduits grâce à la configuration à quatre miroirs. Dans un premier temps, on décrira le dispositif expérimental globalement et tout les choix des optiques qui ce sont imposés afin de transporter le faisceau et de le coupler à la cavité.

Pour la réalisation de notre expérience, nous avons opté pour une diode laser, nous allons commencer cette partie en donnant un rappel sur les diodes laser puis on décrira tout le travail qui a été effectué afin de réaliser le système de la diode laser et coupler le faisceau laser à la cavité.

1. Rappel sur les lasers à semi-conducteurs

Au cours de la dernière décennie, les diodes laser, appelées encore laser à semi-conducteur, sont devenues un des moteurs modernes en physique atomique, optique quantique, et la spectroscopie laser. Le désir d'une source laser simple, robuste, portable et bon marché a stimulé les efforts pour étendre l'utilité de ces lasers aux domaines pour lesquels la stabilité en fréquence est une condition préalable, par exemple, la spectroscopie de très grande précision ou la métrologie.

Un laser peut être simplement modélisé par l'association de deux sous-ensembles : un milieu amplificateur qui génère un gain optique, et un résonateur qui permet à une onde optique d'osciller dans le milieu actif amplificateur.

Les milieux actifs lasers (milieux amplificateurs) peuvent être solides ou gazeux ; historiquement, le premier laser était un laser à rubis. Les résonateurs sont généralement constitués de miroirs, dont la géométrie varie selon la structure spectrale désirée pour la lumière émise.

Les diodes lasers possèdent la structure la plus simple qui soit. Une jonction PN qui fait à la fois office de milieu amplificateur et de résonateur par ses faces clivées.

Faisons un petit rappel sur les semi-conducteurs avant d'aller plus en profondeur dans la description du dispositif expérimental.

1.1. Les semi-conducteurs

Au cours de la dernière décennie, les diodes laser, appelées encore laser à semi-conducteur, sont devenues un des moteurs modernes en physique atomique, optique quantique, et la spectroscopie laser. Le désir d'une source laser simple, robuste, portable et bon marché a stimulé les efforts pour étendre l'utilité de ces lasers aux domaines pour lesquels la stabilité en fréquence est une condition préalable, par exemple, la spectroscopie de très grande précision ou la métrologie.

Un laser peut être simplement modélisé par l'association de deux sous-ensembles : un milieu amplificateur qui génère un gain optique, et un résonateur qui permet à une onde optique d'osciller dans le milieu actif amplificateur.

Les milieux actifs lasers (milieux amplificateurs) peuvent être solides ou gazeux ; historiquement, le premier laser était un laser à rubis. Les résonateurs sont généralement

constitués de miroirs, dont la géométrie varie selon la structure spectrale désirée pour la lumière émise.
Les diodes lasers possèdent la structure la plus simple qui soit. Une jonction PN qui fait à la fois office de milieu amplificateur et de résonateur par ses faces clivées.
Faisons un petit rappel sur les semi-conducteurs avant d'aller plus en profondeur dans la description du dispositif expérimental.

Les semi-conducteurs sont caractérisés par les états énergétiques des électrons les composant. En effet, les électrons peuvent occuper l'une ou l'autre des bandes d'énergie suivantes [95][96] :

- La bande de valence (BV) pleine à la température de 0 K.
- La bande de conduction (BC) vide à la température de 0 K.

Entre les deux, se trouve la bande interdite (BI ou gap) au milieu de laquelle se trouve le niveau énergétique de Fermi *Ef* (figure 3.1.).

Lorsque le semi-conducteur se trouve à l'équilibre thermodynamique, la répartition des électrons du solide dans les bandes d'énergie est décrite par la statistique de Fermi-Dirac. À l'équilibre thermodynamique, la probabilité de trouver un électron d'énergie E vaut :

$$f(E) = \frac{1}{\left(1 + \exp\left(\frac{E - E_f}{KT}\right)\right)} \qquad \text{(III.1.1)}$$

Avec :

- $K\,T$ = l'énergie thermique.

- E_f = le niveau de Fermi tel que $f(E_f)$ = 1/2.

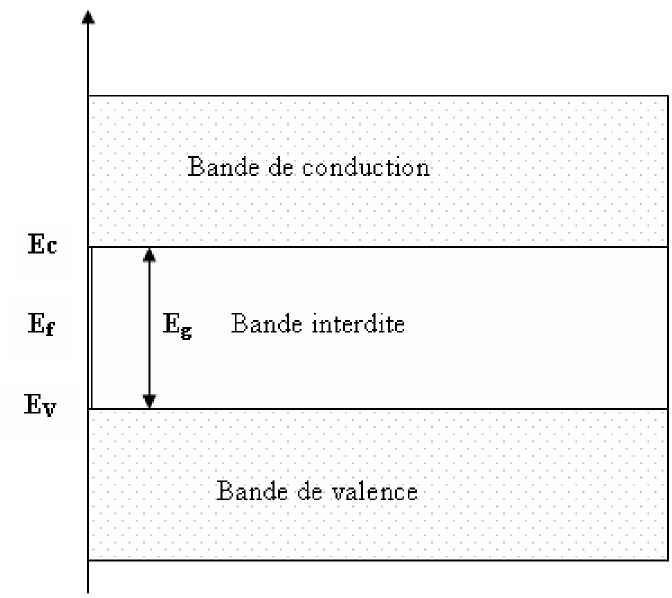


Figure 3.1. Bande d'énergies des semi-conducteurs à 0 K.

Le principe d'exclusion de Pauli interdit à la fonction *f(E)* de prendre toute valeur supérieure à 1. Pour une température T non nulle, la conductivité intrinsèque du SC augmente et la bande de conduction commence à se remplir. Cette transition de l'électron de la BV vers la BC peut se faire par absorption d'un photon. Pour que cette transition ait lieu, il faut qu'il y ait conservation de l'énergie E et du vecteur d'onde k.

La famille des matériaux semi-conducteurs, isolant à bande interdite de l'ordre de 1 eV, peut être caractérisée par deux familles. Les matériaux à gap direct, comme la plupart des composés issus des colonnes III et V du tableau périodique des éléments chimiques et les matériaux à gap indirect comme le silicium (colonne IV).

La notion de gap direct et indirect est liée à la représentation de la dispersion énergétique d'un semi-conducteur : Diagramme E (Energie) - k (Vecteur d'onde), figure 3.2. Ce diagramme permet de définir spatialement les extrema des bandes de conduction et de valence. Ces extrema représentent, dans un semi-conducteur à l'équilibre, des domaines énergétiques où la densité de porteurs type P pour la bande de valence et type N pour la bande de conduction est importante.

On parle de semi-conducteur à gap direct, pour un semi-conducteur dont le maximum de la bande de valence et le minimum de la bande de conduction se situent à valeur voisine du vecteur d'onde k sur le diagramme E(k). On parle de semi-conducteur à gap indirect, pour un semi-conducteur dont le maximum de bande de valence et le minimum de la bande de conduction se situent à des valeurs distinctes du vecteur d'onde k sur le diagramme E (k).

Dans le cadre des applications en émetteur de lumière (interaction lumière/matière), on privilégie les matériaux à gap direct. Leurs extremums de bandes étant situés à des valeurs de k semblables, la probabilité de recombinaisons radiatives des porteurs est plus importante.

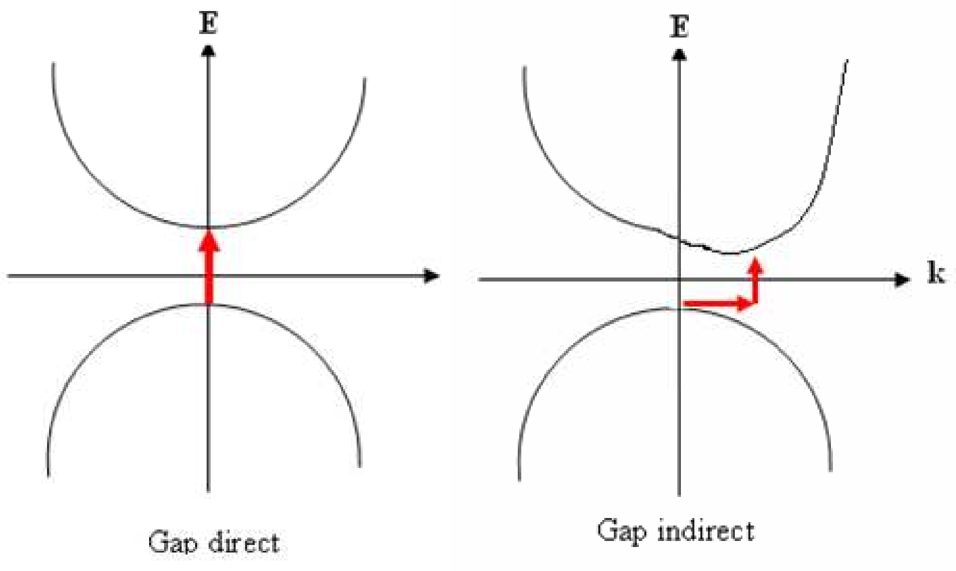


Figure 3.2. Gap direct et gap indirect d'un semi-conducteur.

1.1.1. Dopage des semi-conducteurs :

Le dopage des SC à gap indirect permet de réduire ou d'augmenter la résistivité du milieu et de modifier le niveau de Fermi. La concentration en atomes "dopants" est de l'ordre de 10^8 atomes/cm3 et la longueur d'onde d'émission LASER correspond aux domaines :

- Du visible et de l'infrarouge pour les SC de la famille III-V.
- Du bleu à l'Ultraviolet pour les SC de la famille II-VI.

II	III	IV	V	VI
	Al	Si	P	
Zn	Ga	Ge	As	Se
Cd	In	Sn	Sb	Te
	Tl	Pb	Bi	

Tableau 3-1. Extrait du tableau de Mendeleïev.

Accepteurs d'électrons (dopants de type P) : colonnes II et III.

Donneurs d'électrons (dopants de type N) : colonnes V et VI.

Dans le cas d'un SC fortement dopé, le niveau de Fermi se décale :

- Dans la BC (Ef augmente) pour un dopage de type N ;
- Dans la BV (Ef diminue) pour un dopage de type P.

1.2. Les jonctions

La diode laser est une jonction de semi-conducteurs différemment dopés. La première et la plus simple réalisée en pratique est la jonction P-N. En accolant un semi-conducteur de type N avec un autre de type P (figure 3.3.), au niveau de la jonction, les porteurs vont diffuser d'une zone de forte concentration vers une zone de faible concentration. Les électrons diffusent vers les régions dopées P, laissant les atomes donneurs ionisés positivement dans la région dopée N. Dans la région dopée P où les électrons diffusent, il y a une grande concentration de trous. Les électrons et les trous se recombinent ; le phénomène est identique pour les trous de la région dopée P, ceux-ci laisseront des atomes accepteurs ionisés négativement.
Ainsi, il se forme une étroite région dépeuplée de charges mobiles au niveau de la jonction. D'autre part, les atomes donneurs et accepteurs ionisés engendrent un champ électrique interne dirigé de la zone N vers la zone P. Ce champ implique la création d'un courant d'entraînement qui s'oppose au courant de diffusion. À l'équilibre thermodynamique, ces deux courants se compensent, il subsiste une différence de potentiel V_0 (le potentiel côté N est supérieur au potentiel côté P). L'existence de ce potentiel se traduit par la courbure des bandes d'énergie, à l'équilibre thermodynamique il y a nivellement des niveaux de fermi.
La polarisation directe d'une jonction consiste à appliquer une tension positive V au matériau dopé P, au moyen d'une source extérieure, on lui impose donc le passage d'un courant. Les niveaux d'énergie des deux matériaux se trouvent alors décalés d'une quantité $\Delta E = eV$, où V est la différence de potentiel imposée de part et d'autre de la jonction. Ils prennent alors l'allure présentée sur la figure 3.4 (A).

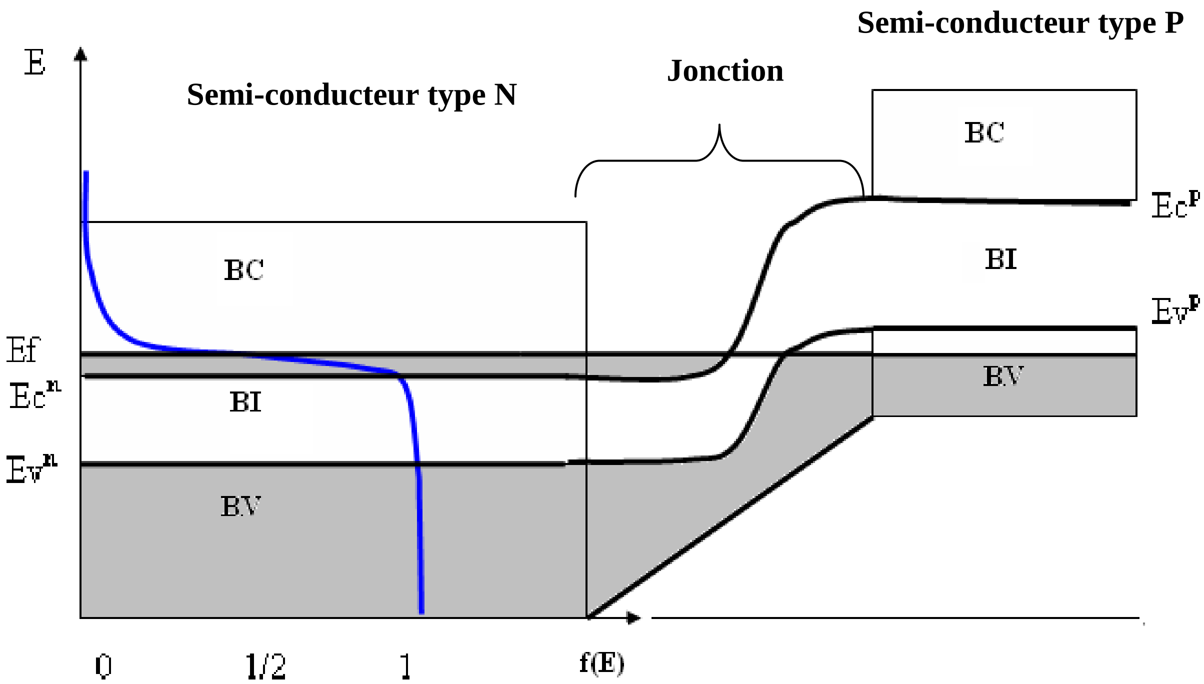


Figure 3.3. Occupation des états énergétiques dans un semi-conducteur.

Jonction P-N à 1'équilibre et en polarisation directe :

Une *homojonction* P-N est la réunion de deux semi-conducteurs de même composition et de type de dopage différent, par exemple GaAs de type P et GaAs de type N. Dans le premier, le niveau de Fermi est proche de la BV, dans le second, il est proche de la BC. Or la thermodynamique exige qu'à 1'équilibre, la jonction étant non polarisée, le niveau de Fermi soit constant dans toute la structure. Il en résulte le profil des bords de bandes de valence et de Conduction à 1'allure, représenté sur la figure 3.3. Il existe au voisinage de la jonction une *zone désertée* de porteurs libres. Les trous du matériau P et les électrons du matériau N sont séparés par les barrières de potentiel et ne peuvent se recombiner.

La polarisation directe d'une jonction consiste à appliquer une tension positive V au matériau P, ce qui a pour effet de diminuer ces barrières de qV (q = 1,6 10~19 coulomb). Les trous et les électrons peuvent alors diffuser (transport sous 1'effet d'un gradient de concentration) respectivement vers les régions N et P et se recombiner au voisinage de la jonction où il y a à la fois des trous et des électrons en excès par rapport à 1'équilibre. Pour chaque paire électron-trou recombinée, il passe en régime permanent une charge élémentaire dans le circuit où est insérée la diode. Dans la région de recombinaison, le niveau de FERMI, unique à 1'équilibre, se dédouble en deux pseudo niveaux de FERMI dont 1'écart, à la jonction, est égal à qV soit : qV-Fn-Fp (figure 3.4.).

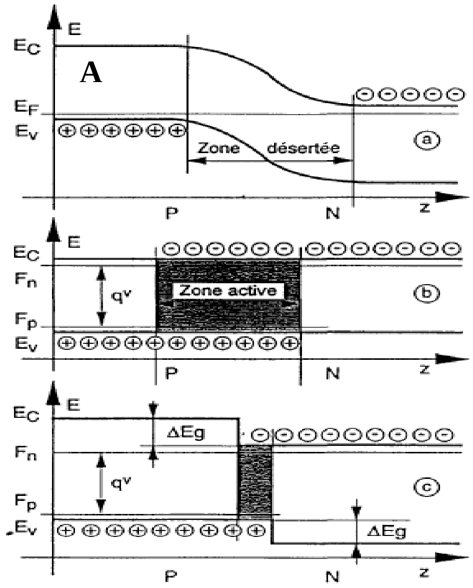


Figure 3.4. Jonction polarisée par une tension *V*.

La caractéristique I/V (courant/tension) de la jonction est donnée par la formule de SHOCKLEY :

$$I = I_s \left(\exp\left({}^{qV}\!/_{T} \right) - 1 \right) \qquad \text{(III.1.2)}$$

Où Is est appelé courant de saturation.

***Double hétérojonction* [97][98] :**

Dans le cas d'une homojonction, 1'épaisseur de la zone de recombinaison, ou *zone active,* est déterminée par les mécanismes de diffusion et de recombinaison et a pour ordre de grandeur la somme des *longueurs de diffusion* des électrons et des trous, soit quelques microns. C'est une caractéristique des matériaux qu'il n'est pas possible de diminuer significativement.

Un moyen d'ajuster par construction 1'épaisseur de zone active est de réaliser par épitaxie une structure à *double hétérojonction* (DH). Elle comprend une couche du matériau devant constituer la zone active, par exemple GaAs, entre deux couches de matériaux de types respectivement P et N. Les jonctions GaAs-GaAlAs, appelées *hétérojonctions* parce que entre des matériaux de gaps différents, se constituent des barrières de potentiel pour les électrons et les trous, c'est le *confinement électronique.* Les moyens modernes d'épitaxie permettent ainsi de réaliser des couches actives dont 1'épaisseur peut être aussi faible que quelques couches atomiques et donc inférieure à un nanomètre.

1.3. Les diodes laser :

Les diodes laser (figure 3.5.) sont des composants complexes, intégrant le plus souvent un ou plusieurs puits quantiques, une double hétérostructure et des structures sélectives en longueur d'onde de type DBR (distributed Bragg reflectors) ou DFB (distributed feedback). Afin de simplifier la description des principaux phénomènes régissant le fonctionnement d'une diode laser, nous la présentons dans sa version primitive. Elle se résume alors à une jonction P-N associée à un résonateur optique. Les porteurs sont injectés puis recombinés au niveau de la jonction P-N donnant ainsi naissance à l'émission de photons. Lorsque la densité de porteurs dépasse une certaine valeur, l'effet laser s'établit.

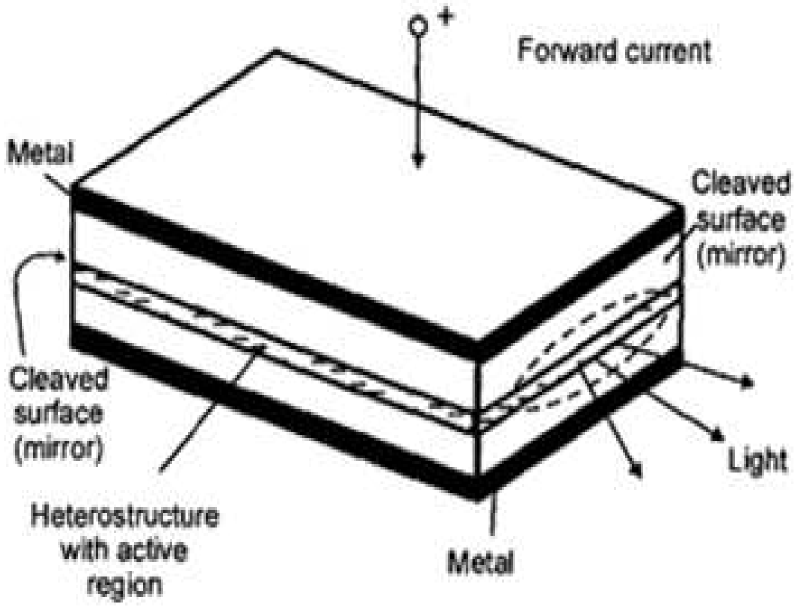


Figure 3.5. Schéma d'une diode laser Fabry Pérot.

Diodes laser à structure Fabry Pérot

Les premières diodes laser avaient une structure dite à homojonction simple. Lorsque cette dernière est polarisée dans le sens direct, les trous de la région dopée P diffusent vers la région dopée N, alors que les électrons diffusent de la région dopée N vers la région dopée P. Autour de cette jonction, la recombinaison des paires électron-trou en excès donne naissance à des photons. Comme dans le cas des lasers classiques, l'amplification de la lumière par émission stimulée ne se produit que si la jonction est en état d'inversion de population. Le courant de polarisation maintient cet état. Les photons émis se propagent dans la direction de la jonction et perpendiculairement aux deux faces qui constituent une cavité résonante de type Fabry-Pérot. Comme l'indice de réfraction est élevé, de l'ordre de 3,5, les interfaces air- semi-conducteur présentent une réflectivité proche de 0,3. Ainsi, un simple clivage des faces du semi-conducteur permet d'obtenir un résonateur dont les pertes sont suffisamment faibles pour permettre l'effet laser.

Mais ces diodes laser à homo-jonction ont un courant de seuil particulièrement élevé à cause de la diffusion des charges de part et d'autre de la jonction. Un meilleur confinement transverse des porteurs a été obtenu par la réalisation des structures à double hétérojonction. Son principe consiste à entourer la couche active par un matériau dont la largeur de gap est plus grande. Ceci a aussi pour effet d'améliorer le confinement du champ optique. Les progrès apportés par l'introduction des diodes laser à hétéro-jonction sont tels que cette structure est communément incorporée dans les diodes laser modernes. Les diodes laser constituées d'un matériau semi-conducteur quaternaire III-V en InGaAsP sur un substrat binaire d'InP permettent de couvrir la bande spectrale allant 1,3 µm à 1,67 µm. Ainsi, elles sont parfaitement adaptées aux dispositifs à fibres optiques classiques qui sont essentiellement constituées de silice et ont donc un minimum de dispersion chromatique à 1,3 µm et un minimum d'absorption à 1,5 µm.

2. Dispositif expérimental

Dans la section précédente, nous avons présenté des généralités sur le fonctionnement des lasers à semi-conducteurs puisque la source utilisée pour l'étude de la cavité Fabry Pérot à quatre miroirs est une diode laser. Nous allons à présent décrire le choix de tous les composants optiques utilisés afin de réaliser le montage expérimental. Nous allons commencer par une caractérisation de la diode laser générale puis on s'intéressera à la réalisation du dispositif expérimental.

2.1. Le système de la diode laser

La diode laser (L808P010, L808P030) de Thorlab's est utilisée. C'est une diode de type MQW (*multiple quantum well*), c'est-à-dire une diode à puits quantiques multiples. Elle émet principalement dans la gamme spectrale comprise entre 800 nm et 820 nm. Les diodes laser sont des composants très difficiles à manipuler, elles sont très sensibles à la surchauffe, au courant et aux charges électrostatiques.

La longueur d'onde d'émission de la diode varie avec la température de fonctionnement et avec le courant d'alimentation, c'est pourquoi elle doit être reliée à un contrôleur de température (TED200) qui permet de régler la température de fonctionnement par effet Peltier avec le module Peltier (TCLDCM9) dans lequel est insérée la diode, et un driver de courant (LDC201U) qui alimente la diode et permet sa modulation en courant et en fréquence.
Le système de la diode laser est un kit (LTC 100 de Thorlabs) figure 3.6.



(a) (b) (c)

Figure 3.6. Le kit diode laser.

(a) diodes laser
(b) lentille asphérique
(c) le montage complet

2.1.1. Caractéristique *p = f (I)* de la diode laser :

Pour tracer la caractéristique d'émission de la diode laser, le faisceau est directement envoyé sur une photodiode, la variation de la tension en fonction du courant est obtenue en faisant varier le courant de contrôle de la diode laser (figure 3.7.). La caractéristique de la diode laser est représentée sur la figure 3.8. Pour éliminer tout bruit parasite dû à la lumière environnante, le système diode laser/photodiode est placé sous une protection opaque.

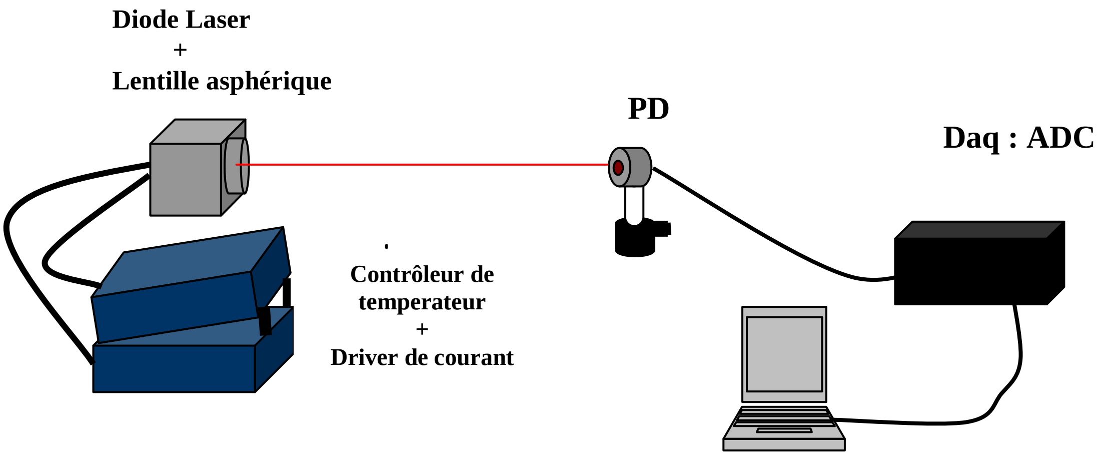


Figure 3.7. Dispositif expérimental pour le tracé de la caractéristique de la diode.

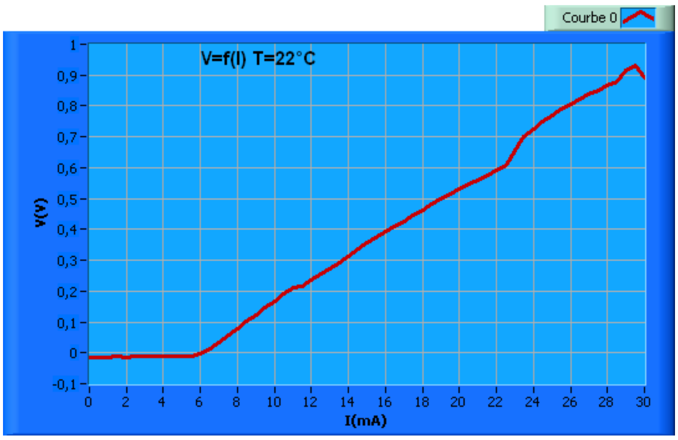


Figure 3.8. Caractéristique P=f (I) de la diode laser.

Le graphe ci-dessus, illustre la variation de la puissance émise en fonction du courant d'excitation de la jonction. Bien entendu, la puissance lumineuse ne devient non nulle qu'au-delà du courant de seuil (ici Is = 6 mA). La pente de la droite donnant la croissance linéaire de la puissance en fonction du courant définit le rendement différentiel du laser. C'est une quantité essentielle dans la mesure où l'on a toujours intérêt à avoir un rendement différentiel le plus élevé possible pour atteindre une puissance lumineuse donnée avec un minimum de courant.

2.1.2. Profil d'intensité du faisceau émis par la diode laser :

Pour visualiser le profil du faisceau laser, nous avons utilisé une caméra CCD USB (mvBlueFox de Matrix Vision). Sa résolution est de 640 x 480 pixels, elle fonctionne en mode continu et elle possède une entrée trigger qui permet un fonctionnement en mode pulsé.
Nous avons mesuré le profil d'intensité du faisceau émis par diode avec une caméra CCD placée à la sortie de la diode laser. Le faisceau émis par la diode laser est très large et très astigmatique, la taille du faisceau sur l’axe des y est d’environ 5 fois sa taille en x.

Le faisceau tel qu'il est délivré par la diode laser n'est pas exploitable mais on verra dans la section suivante les solutions adaptées pour améliorer le profil de ce faisceau.

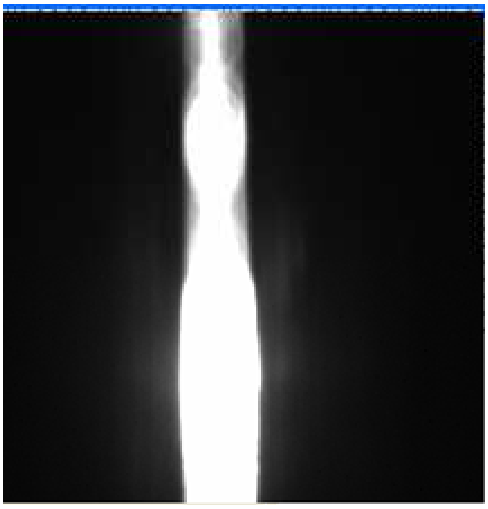


Figure 3.9. Profil du faisceau de la diode mesuré par une CCD.

2.1.3. Spectre de la diode laser :

Après avoir fixé la température et le courant de contrôle, le faisceau de la diode laser est envoyé sur un analyseur de spectre USB relié à l’ordinateur pour mesurer la largeur de son spectre,(cf. figure 3.10). Le résultat de la mesure est porté sur la figure 3.11.

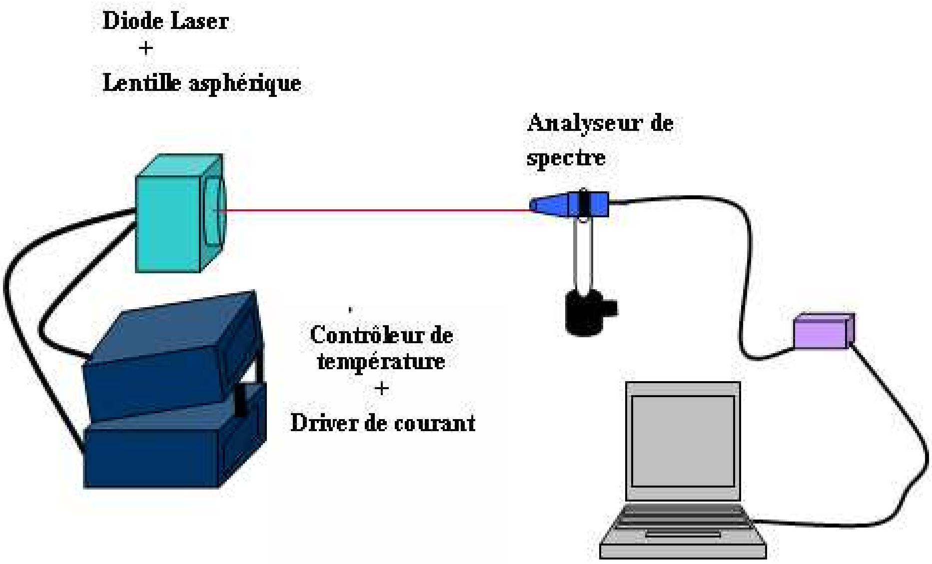


Figure 3.10. Mesure du spectre de la diode laser.

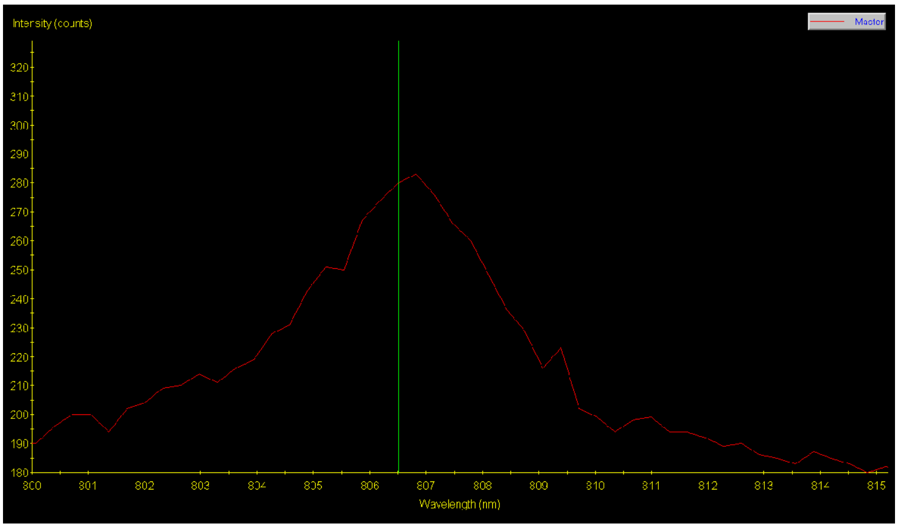


Figure 3.11. Spectre de la diode laser.

D'après la mesure, le spectre de la diode laser s'étale de 800 nm à 815 nm. La largeur du spectre de la diode peut être un handicap, cependant il existe une solution à ce problème. En effet, si l'on renvoie une partie du faisceau à l'intérieur de la cavité de la diode, grâce à des éléments sélectifs en longueur d'onde, on peut rétrécir le spectre de la diode et permettre un fonctionnement monomode. Dans notre cas, nous avons utilisé un réseau de diffraction. Nous allons revenir sur la manière dont le réseau est utilisé dans le paragraphe suivant.

2.2. Réalisation du montage

Bien que la diode laser soit une source bon marché, la largeur de son spectre et son faisceau très divergent imposent l'adaptation de certaines solutions pour obtenir un faisceau exploitable qu'on pourra coupler à la cavité. L'idée d'utiliser la diode en configuration Littrow a été adoptée.

L'allongement de la cavité de la diode laser permet d'améliorer sa stabilité en fréquence, d'assurer l'opération en régime monomode et d'affiner son profil de raie. L'utilisation d'un réseau de diffraction comme élément sélectif en longueur d'onde permet de renvoyer une partie du faisceau dans la cavité de la diode et la force à émettre dans le même intervalle de longueur d'onde. L'effet de la réinjection optique a fait l'objet de plusieurs études [99][100][101].

La figure 3.12. représente un schéma de la diode laser en configuration Littrow. Dans cette configuration, le faisceau est réfléchi partiellement à l'ordre 0 (réflexion spéculaire), tandis qu'une autre partie est réfléchie à l'ordre -1, en direction de la diode laser. La condition de Littrow est que l'angle d'incidence est choisi de façon à ce que la direction de l'ordre -1 soit exactement anti-parallèle à la direction du faisceau incident.
Le faisceau à l'ordre 0 constitue la sortie utile alors que le faisceau réinjecté dans le laser (ordre -1) favorise l'établissement d'un mode longitudinal dominant.
L'accord en longueur d'onde d'un laser en configuration de Littrow est généralement obtenu par une rotation du réseau.

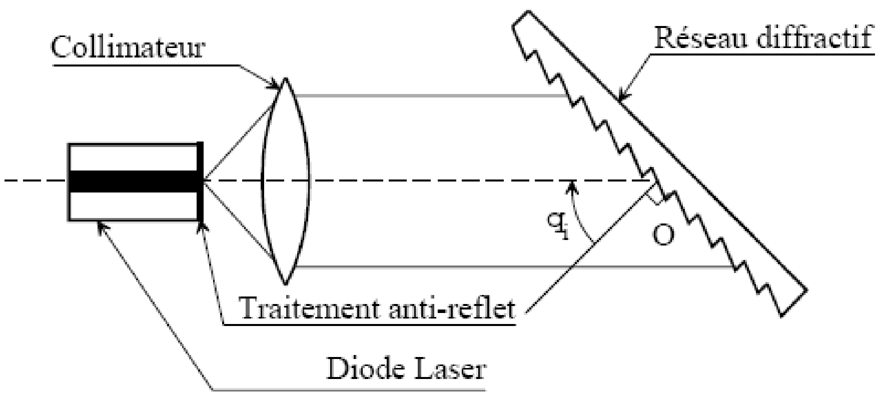


Figure 3.12. Schéma d'une diode laser à cavité étendue en configuration Littrow.

La mise en place de la diode laser a été très difficile. En effet, la diode laser ne peut pas être utilisée telle qu'elle était fournie au départ mais il a fallu faire plusieurs manipulations afin de réaliser un montage pratique et assez stable. Décrivons le montage étape par étape :

1. La diode laser est un composant très fragile qu'il faut manipuler avec soins et il faut veiller à ne pas dépasser le courant limite, le faisceau délivré par la diode étant très divergent il a fallu utiliser un collimateur, dans notre cas le collimateur est une lentille asphérique. On appelle lentille asphérique une lentille dont la forme est proche d'une portion de sphère, mais n'est pas complètement sphérique, ses bords sont modifiés. En effet, les lentilles de forme traditionnelle sont de forme sphérique, ce qui conduit à des aberrations optiques. Par exemple, les rayons qui passent par le centre ne convergent pas tout à fait au même point, ce qui provoque du flou aux grandes ouvertures. Une lentille asphérique bien calculée permet de contrer ce phénomène (cf. figure 3.13.).

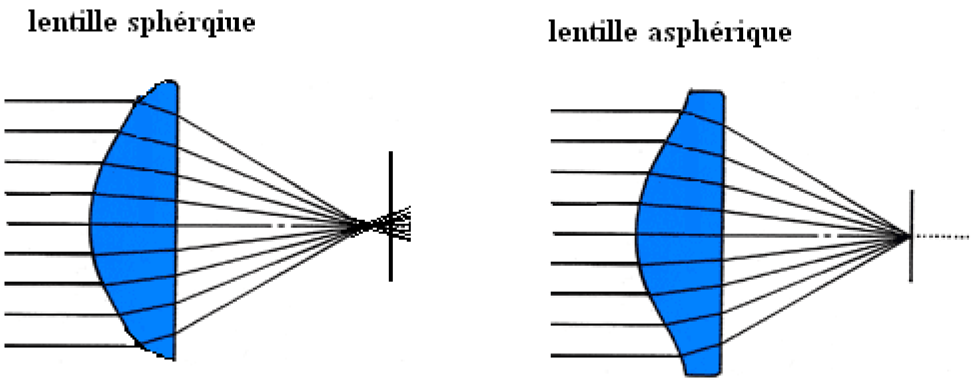


Figure 3.13. Schéma focalisation par une lentille sphérique (à gauche) et une lentille asphérique à droite.

La diode laser étant très sensible à l'alignement, pour avoir un montage stable, un support spécial a été fabriqué pour la lentille de collimation. Ce support permet de placer la lentille à la bonne distance de la diode et de bien l'aligner pour ne pas déformer le front d'onde.

2. Le réseau de diffraction a été collé, avec grand soin pour éviter de contaminer le revêtement, sur une petite pièce métallique qui à son tour est fixée sur un support. Il faut s'assurer que les raies du réseau soient alignées dans le bon sens pour avoir les bons ordres de diffraction. La figure 3.14 est une représentation schématique d'un réseau diffraction.
La formule du réseau de diffraction est donnée par l'équation :

$$n\sin(r) = -n\sin(i) + p\frac{\lambda}{a} \qquad \text{(III.2.1)}$$

Où :

- n est l'indice de propagation de l'onde incidente.
- λ est la longueur d'onde.
- i et r sont respectivement l'angle d'incidence et de réflexion.
- a est le pas du réseau de diffraction.
- p est un nombre entier.

Pour n = 1 (propagation dans l'air), on obtient :

$$a\left(\sin(r) + \sin(i)\right) = p\lambda \qquad \text{(III.2.2)}$$

Un maximum d'énergie est diffracté lorsque les angles i et r correspondent à la réflexion spéculaire sur chaque petit miroir du réseau, ce qui se traduit par :

$$i + r = 2\theta \qquad \text{(III.2.3)}$$

Si l’on choisit p, θ et i tels que (III.2.2) soit vérifiée, pour $r = 2\theta - i$, toute l'énergie est diffractée dans un seul ordre p.

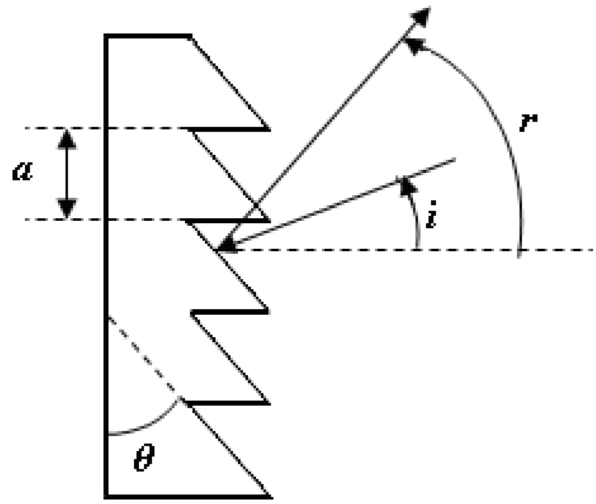


Figure 3.14. Schéma d'un réseau de diffraction.

Formule du réseau de diffraction :

Nous avons utilisé le réseau (GR13-1208) de Thorlabs dont les paramètres sont :

- angle de Blaze 26,44°
- longueur d'onde 750 nm
- 1 200 g/mm (le nombre de dents par mm), ce qui correspond à un pas $a=\frac{10^3}{1200}$ =0,33 µm.

En tenant compte de (III.2.3) dans (III.2.2), l'angle d'incidence est donné par :

$$\sin(i) = p\frac{\lambda}{2a} \qquad \text{(III.2.4)}$$

Pour p = 1 et λ = 808 nm, $\sin(i)=\frac{0,808}{2\times 0,803}\ \ 0,485 \ \Rightarrow \ i \ \ 28,8°$

La figure 3.15 représente le dispositif mis en place pour la diode laser et sa cavité étendue. On y observe le module de la diode et le réseau de diffraction (à gauche, le réseau de diffraction et à droite, la diode laser). Pour plus de stabilité, l'ensemble est monté sur un support rigide qui a été fabriqué au laboratoire.

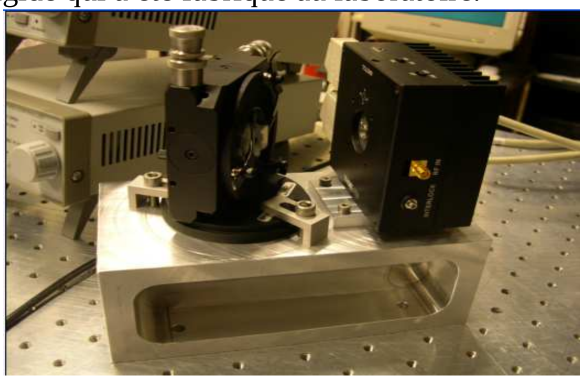


Figure 3.15. Montage de la diode laser avec sa cavité étendue en configuration Littrow.
À gauche, le réseau de diffraction, à droite la diode laser.

3. Après avoir réalisé le montage de la diode laser avec sa cavité étendue, nous avons regardé le profil du faisceau émis avec une caméra CCD. La lentille asphérique fournie avec le kit permet de collimater le faisceau. Ce dernier reste encore très divergent et difficile à exploiter (la taille du faisceau sur l'axe des Y est d'environ 5 fois sa taille en X, dans notre cas). Pour diminuer cet astigmatisme et obtenir ainsi un faisceau rond, nous avons mis en sortie de la diode un prisme anamorphique, lorsque le prisme est correctement aligné, le faisceau s'allonge sur une direction au détriment d'une autre, figure 3.16. La figure 3.17. est une capture d'écran de la CCD du faisceau sans le prisme anamorphique et avec le prisme.

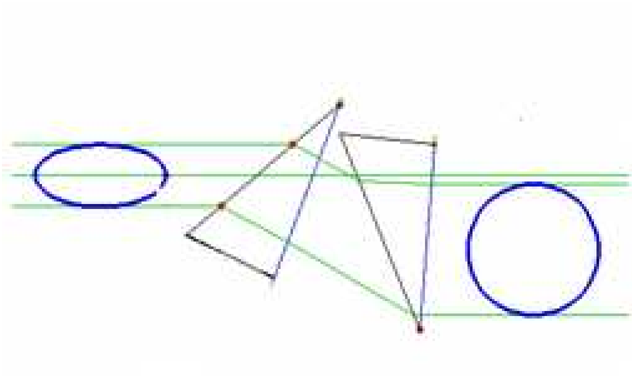


Figure 3.16. (A gauche) Prisme anamorphique. (A droite) Principe d'un prisme anamorphique

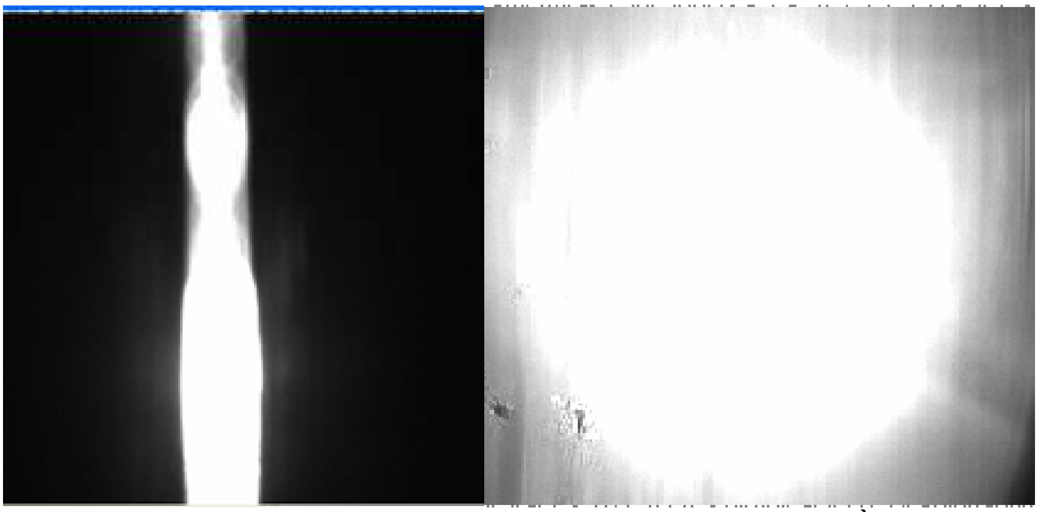


Figure 3.17. Faisceau délivré par la diode laser, mesuré avec une CCD. À gauche, sans le prisme anamorphique, à droite avec le prisme anamorphique.

4. Le faisceau obtenu est rond, mais il y a des diffractions sur les bords du prisme qui risquent de poser des problèmes lors du couplage à la cavité. Pour obtenir un profil approximativement Gaussien, nous avons utilisé un diaphragme pour ne sélectionner que la partie centrale du faisceau. La figure 3.18. représente le profil transverse du laser après le diaphragme, où l'on voit que le faisceau à un profil Gaussien.

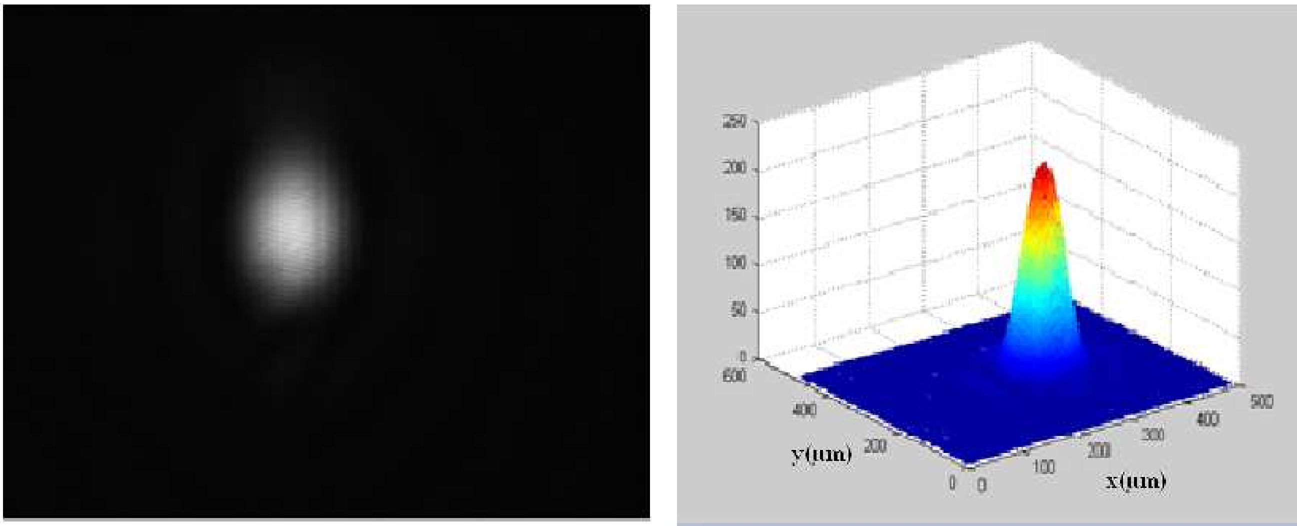


Figure 3.18. Profil du faisceau après le diaphragme. À gauche, une vue 2D mesurée par une CCD. À droite, une projection en 3D.

5. Pour assurer plus de stabilité pour le système, l'ensemble a été placé sous un boîtier en bois recouvert de l'intérieur par une feuille de plomb pour l'isoler des bruits externes.
Le schéma final de tout le montage est représenté sur la figure 3.19.

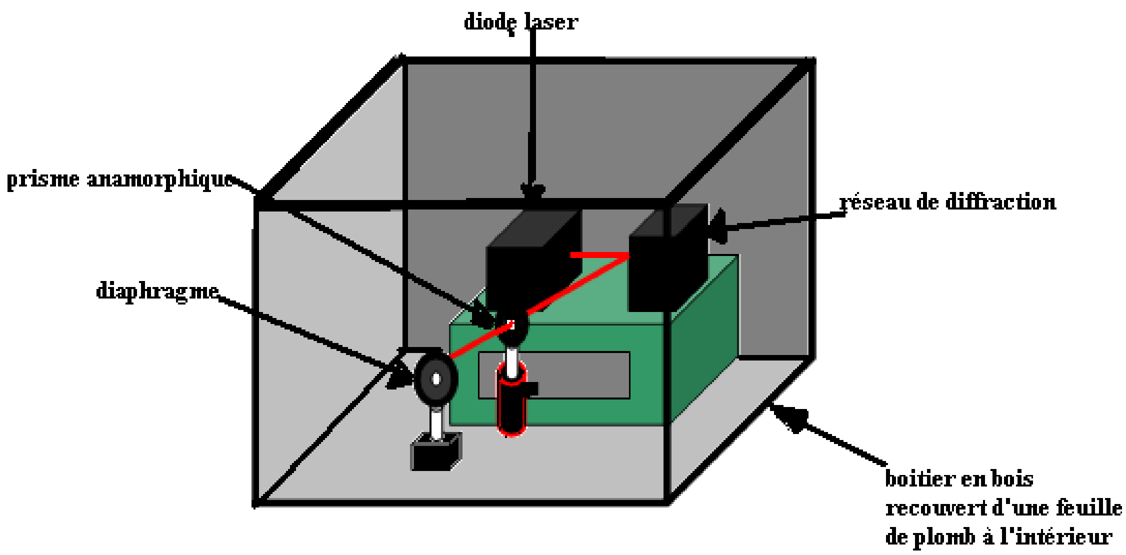


Figure 3.19. Système de la diode laser en configuration Littrow sous le boîtier d'isolation.

3. La cavité optique

La cavité optique Fabry Pérot est constituée de quatre miroirs : deux miroirs plans et deux miroirs sphériques. Tous les miroirs sont du même diamètre (1 inch) et les miroirs sphériques ont le même rayon de courbure (R = 500 mm). Tous les miroirs sont traités antireflets avec un revêtement multicouches diélectriques pour la longueur d'onde 800 nm et leur coefficient de réflexion est supérieur à 0,997. De chaque côté, sont placés un miroir sphérique et un miroir plan. Les pairs de miroirs sont placées parallèlement, l'une en face de l'autre. Afin de maintenir les miroirs en position et d'assurer leur parallélisme, nous avons choisi de concevoir un système monolithique en partie car les miroirs sont disposés dans des supports réglables mais ces supports sont fixés l'un par rapport à l'autre par une pièce mécanique qui les maintient.

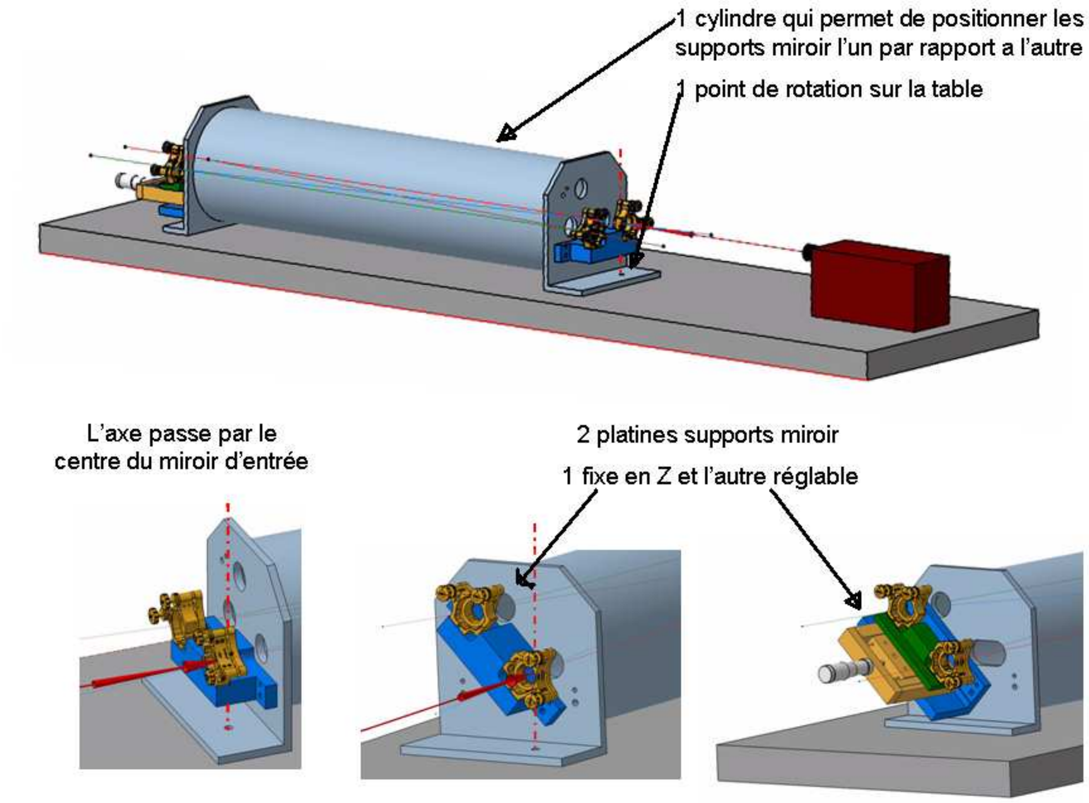


Figure3.20. Prototype de la cavité à quatre miroirs.

La distance relative entre les paires de miroirs est fixée par un cylindre rigide fixé sur la table optique. Ce montage présente l'avantage par rapport aux montures indépendantes de ne nécessiter aucun réglage des distances relatives entre les miroirs.

La paire de miroirs de l'un des deux côtés est fixée sur une table de translation micrométrique afin de permettre d'agir sur la distance entre les miroirs (elle est nécessaire pour se rapprocher d'une configuration concentrique).

La cavité est construite de façon à permettre l'étude d'une géométrie planaire et d'une géométrie non planaire des miroirs, sans un désalignement considérable du système, les distances entre les centres des miroirs restent les mêmes dans les deux configurations.

La figure 3.21. représente les deux configurations planaire (2D) et non planaire (3D).

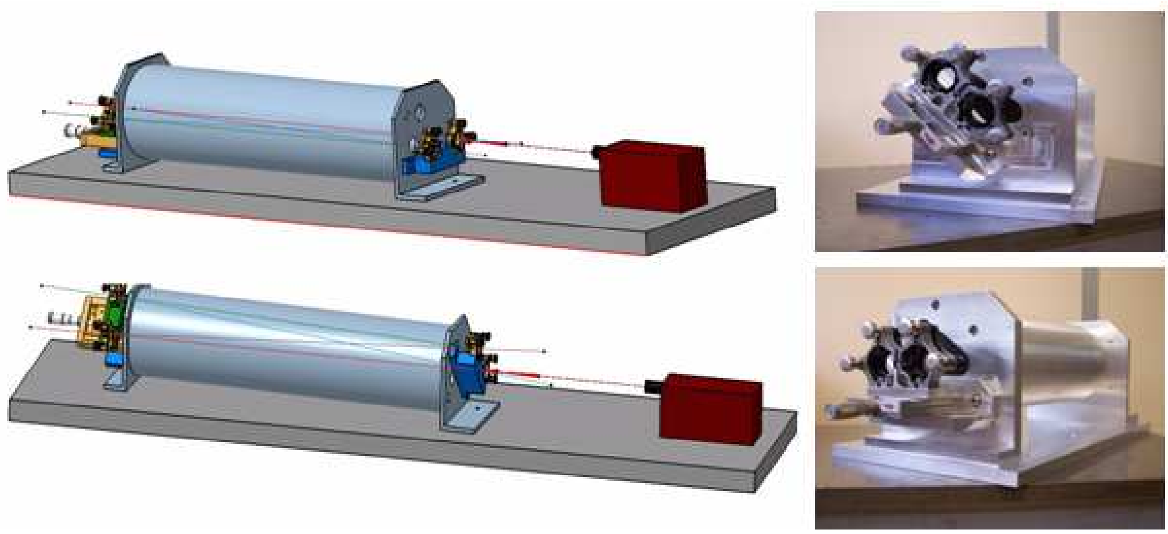


Figure 3.21. Cavité à quatre miroirs en 2D et 3D.

4. Le Schéma optique :

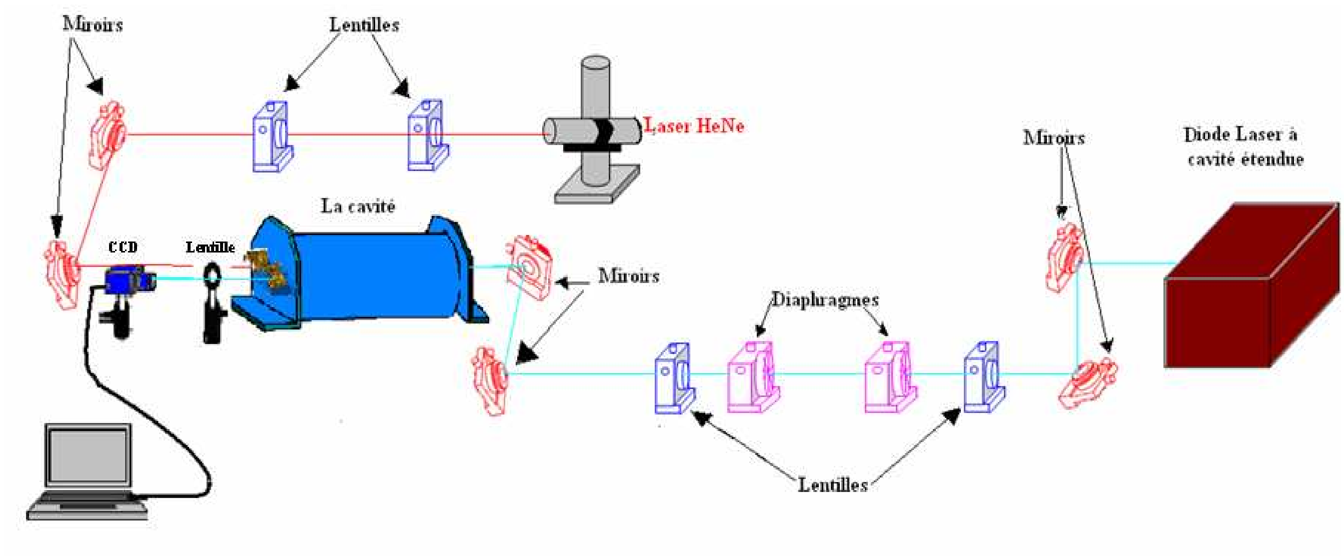


Figure 3.22. Vue générale de la table optique.

Le schéma optique est représenté sur la figure 3.22., on peut distinguer sur la table optique les éléments suivants :

D'un côté de la cavité :

- La diode laser : elle est placée sous un couvercle fabriqué en bois recouvert d'une feuille de plomb à l'intérieur pour assurer une isolation des bruits et des vibrations externes (cf. figure 3.19.).

- Le faisceau de la diode est aligné sur la cavité grâce à deux miroirs formant un périscope qui permettent un ajustement de la hauteur du faisceau et son alignement sur le faisceau du laser d'alignement.
- Un premier télescope, constitué par deux lentilles, permet le couplage du faisceau sur le mode fondamental de la cavité.
- Deux diaphragmes sont disposés sur le trajet du faisceau de la diode pour faciliter son alignement sur la cavité.

De l'autre côté il y a :

- Un laser d'alignement Hélium Néon.
- Un autre télescope permettant aussi de coupler le laser sur le mode fondamental de la cavité. Le couplage du laser d'alignement n'est pas indispensable mais, dans notre cas, les pertes de puissance sur les miroirs rendent difficile l'alignement du laser rouge, c'est pourquoi nous avons choisi de le faire.
- Un autre périscope permet d'ajuster la hauteur du faisceau du laser He-Ne à la hauteur de la cavité.
- Enfin, une caméra CCD reliée à un ordinateur permet le diagnostique du faisceau et des modes de résonance de la cavité, pour la mesure de la taille du faisceau, c'est un analyseur de faisceau qui est utilisé.

4.1. La procédure d'alignement de la cavité :

L'alignement de la cavité à quatre miroirs est très compliqué, nous avons commencé par aligner les miroirs avec le laser rouge. Mais après le passage dans les miroirs de la cavité, la puissance du laser d'alignement devient si faible qu'il est difficile de l'utiliser pour l'alignement. Pour remédier à ce souci nous avons décidé de coupler le faisceau du laser rouge à la cavité, tout comme le faisceau de la diode Laser. Nous avons calculé le waist entre les deux miroirs plan (*wp*) et aussi entre les deux miroirs plan-concaves (*ws*). Avec la géométrie de la cavité que nous avons, on obtient $ws \sim 20\ \mu m$ et $wp \sim 3$ mm.
Comme le faisceau de la diode laser est très divergent, il est plus facile de coupler le faisceau au waist le plus grand ; donc il faut injecter le faisceau par un miroir plan pour envoyer le maximum de la puissance de la diode.

4.1.1. Alignement de la diode laser :

Le faisceau délivré par la diode laser n'est pas un faisceau gaussien, donc on ne va pas utiliser les lois de propagation d'un faisceau gaussien mais on considèrera le faisceau comme un objet de taille D correspondant au diamètre du faisceau. Ce faisceau sera transporté par deux lentilles, de telle sorte que lorsque ce faisceau arrive au centre de la cavité, il sera suffisamment couplé à son waist. La figure ci-dessous représente le schéma de focalisation.

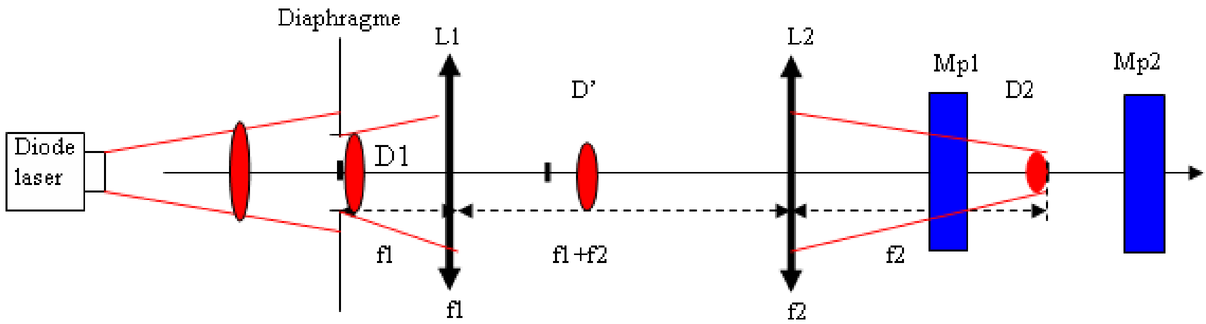


Figure 3.23. Schéma du principe de la focalisation du faisceau de la diode laser.

Derrière la diode laser nous avons placé un diaphragme de diamètre D1, égal à 1,2 mm et nous voulons coupler le faisceau qui sort du diaphragme à la cavité.
Le faisceau de diamètre D1 est considéré comme étant l'image, il nous faut donc calculer les focales des lentilles qu'il faut utiliser, comme représentées sur le schéma, pour que la taille de l'image de ce faisceau soit égale à D2 = 6 mm, ce qui correspond au diamètre défini par la cavité elle-même.
Le grandissement du système de deux lentilles est égal au produit des grandissements de chacune séparément.
Soit G1, le grandissement de L1 et G2 le grandissement de L2 :

$$G1 = \frac{D'}{D1} = \frac{f1 + f2}{f1}$$

$$G2 = \frac{D2}{D'} = \frac{f2}{f1 + f2}$$

D'où G, le grandissement du système complet :

$$G = G1 \times G2 = \frac{D2}{D1} = \frac{f2}{f1}$$

$$\frac{D2}{D1} = \frac{6}{1{,}2} = 5 \Rightarrow \frac{f2}{f1} = 5$$

Il suffit donc de prendre deux lentilles telles que le rapport de leurs focales soit égal à cinq. On choisit en fait la deuxième lentille telle que la distance entre elle et l'entrée de la cavité soit suffisante pour y insérer les deux miroirs du périscope de l'alignement. Nous avons donc pris une lentille de 1 m de focale. Donc si $f2 = 1000mm \Rightarrow f1 = 200mm$, le schéma de transport du faisceau est indiqué sur la figure ci-dessous :

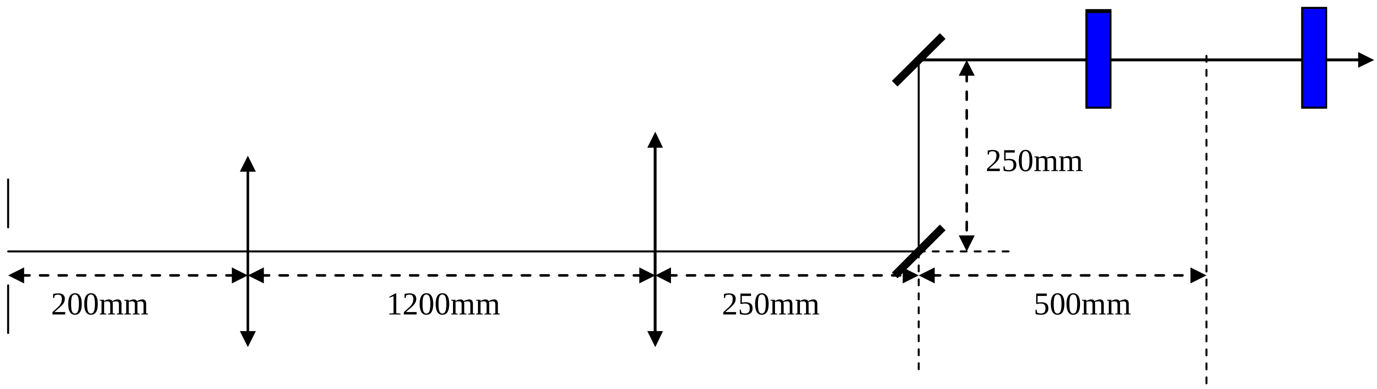


Figure 3.24. Schéma d'alignement du faisceau de la diode laser sur la cavité.

4.1.2. Alignement du laser rouge :

Le laser d’alignement utilisé est un laser HeNe rouge de longueur d’onde λ = 632,8 nm, de 5 mW de puissance. Son profil est parfaitement gaussien monomode (TEM00) ; donc pour les calculs nous avons considéré les formules de transport d'un faisceau gaussien. Les résultats sont portés sur la figure 3.25.

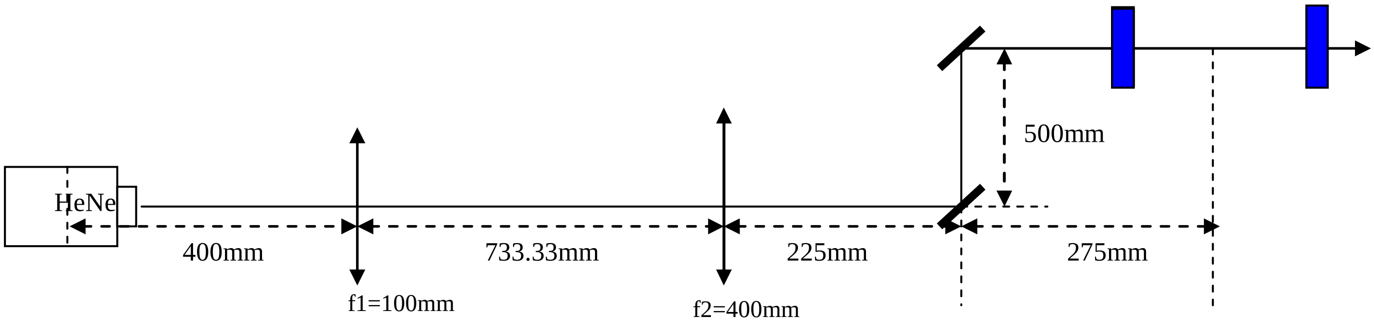


Figure 3.25. Schéma d'alignement du laser rouge.

Après avoir aligné la cavité avec le laser rouge, on aligne le faisceau de la diode laser avec les deux diaphragmes, grâce au premier périscope. Ensuite, avec le deuxième périscope on ramène le faisceau du laser d’alignement sur le même trajet que le faisceau de la diode. De cette façon, on s’assure que les deux faisceaux suivent le même trajet à l’intérieur de la cavité.

Chapitre 4. Exploitation de la cavité à quatre miroirs

Dans le chapitre précédent, nous avons décrit le montage expérimental ainsi que la méthode d'alignement et de couplage du faisceau laser à la cavité. Le but de cette expérience était de vérifier les résultats des calculs théoriques. Dans ce chapitre, il s'agira donc de présenter toutes les mesures prises avec la cavité et ce pour les deux géométries planaire et non planaire. Dans un premier temps, nous allons considérer la cavité planaire dont on présentera d'abord les profils des modes propres, puis on calculera son waist. Dans un second temps, on passera à la géométrie non planaire pour présenter ces modes et mesurer la taille de son waist. Enfin, en conclura par une comparaison des résultats expérimentaux des deux géométries.

2.1. La cavité planaire

1.1. Mesure des modes

Dans les calculs théoriques, nous avons présenté les profils d'intensité de différents modes de la cavité à quatre miroirs en géométrie planaire. À présent, nous allons tester expérimentalement les calculs théoriques de la forme des modes de résonance de la cavité, présentés dans le chapitre 1 de cette partie. Pour ce faire, on place une caméra CCD en sortie de la cavité comme présenté sur la figure 4.1. Nous avons placé une lentille de focale f = 200 mm devant la caméra CCD pour permettre de focaliser le faisceau laser provenant de la cavité. La CCD est mise en mode trigger pour pouvoir sélectionner les modes à mesurer.

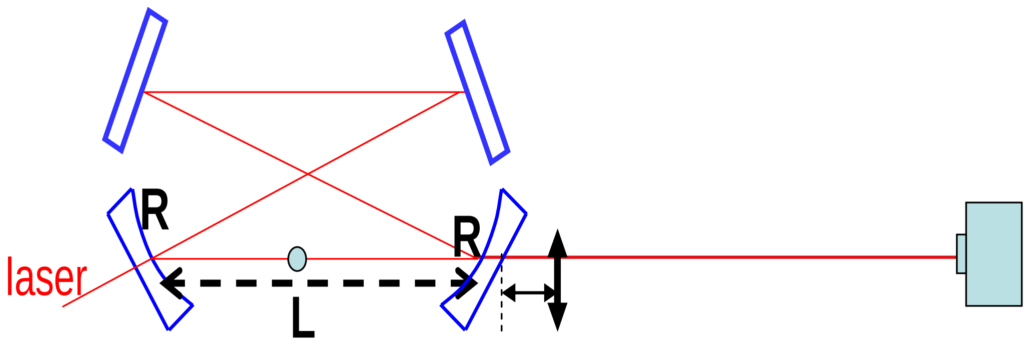


Figure 4.1. Mesure des modes de résonance de la cavité planaire.

La figure 4.2. présente les profils des modes TEM20, TEM10, TEM00 et le mode LG11, mesurés par la CCD en sortie de la cavité. Ces modes ressemblent aux modes d'une cavité Fabry Pérot à standard à deux miroirs comme nous l'avions calculé dans le Chapitre 1.

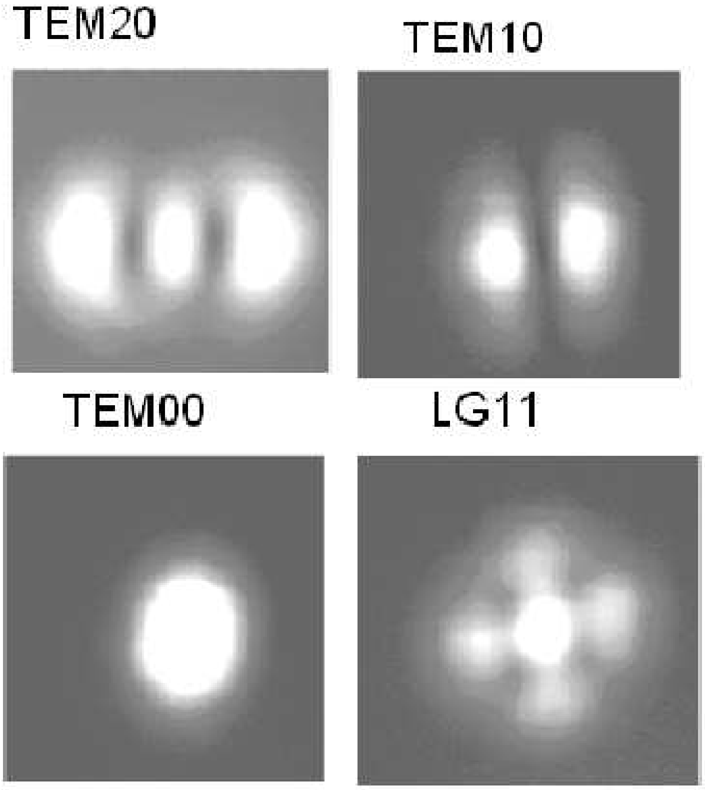


Figure 4.2. Modes de résonance de la cavité planaire mesurés par la caméra CCD.

On sait que la taille du waist dans la cavité dépend de la position des miroirs sphériques. En effet, plus on se rapproche de la confocalité, plus le faisceau est focalisé à mi-distance des deux miroirs sphériques. Pour réaliser un waist le plus petit possible, on positionne les miroirs à une distance L, proche du rayon de courbure des miroirs. Ensuite, grâce à la table de translation, on se rapproche de plus en plus de R. Pour cette mesure, nous avons utilisé un analyseur de faisceau (beam scanner) que nous avons mis à la place de la caméra CCD, en sortie de la cavité et on mesure à chaque fois le mode fondamental (voir la figure 4.3).
Le résultat est porté sur la figure 4.4. On peut y voir clairement que le faisceau devient de plus en plus elliptique lorsque la distance entre les deux miroirs sphériques L se rapproche du rayon de courbure des miroirs. Autrement dit, lorsque l'on se rapproche d'une configuration confocale. On peut voir aussi que lorsqu'on se rapproche au maximum de la confacalité, le faisceau est diffracté par les bords des miroirs sphériques.
Le résultat du calcul théorique de la taille du faisceau pour la cavité planaire présenté sur la figure 4.5. correspond à cet effet que nous avons observé expérimentalement.

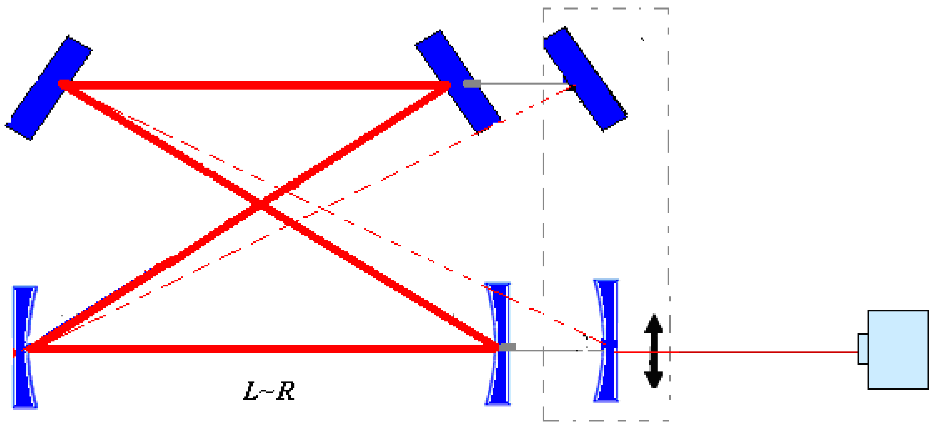


Figure 4.3. Mesure du profil du mode TEM00 en fonction de la concentricité.

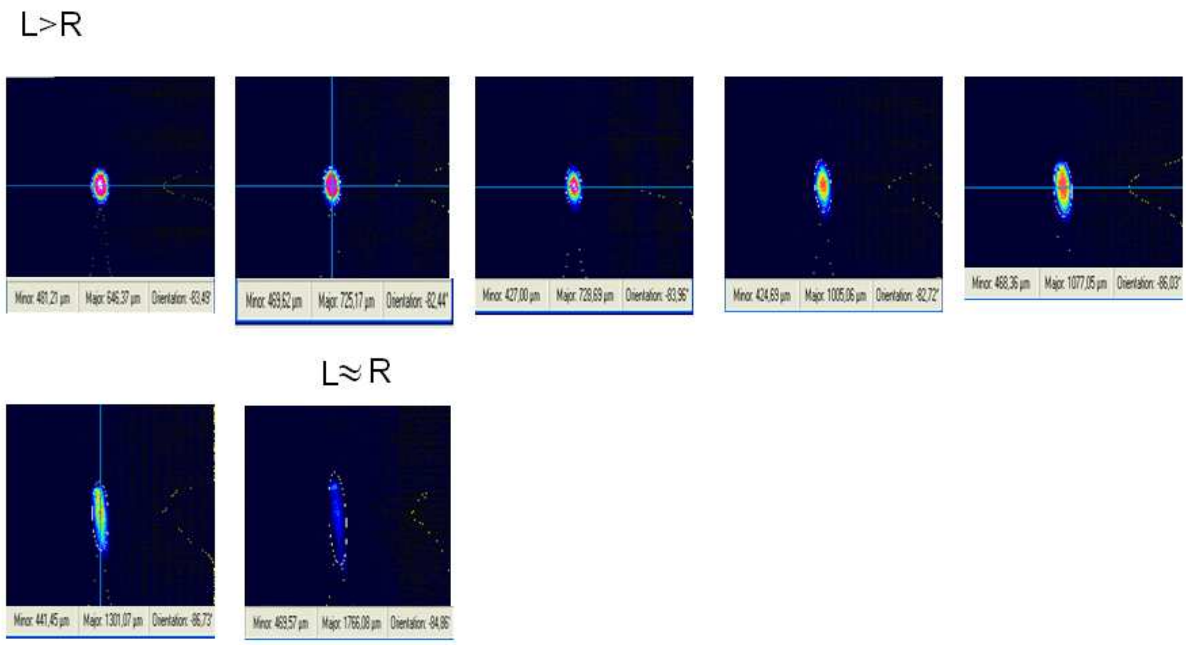


Figure 4.4. Profils d'intensité du mode fondamental mesurés par un analyseur de faisceau pour différentes valeurs de la distance entre les miroirs sphériques.

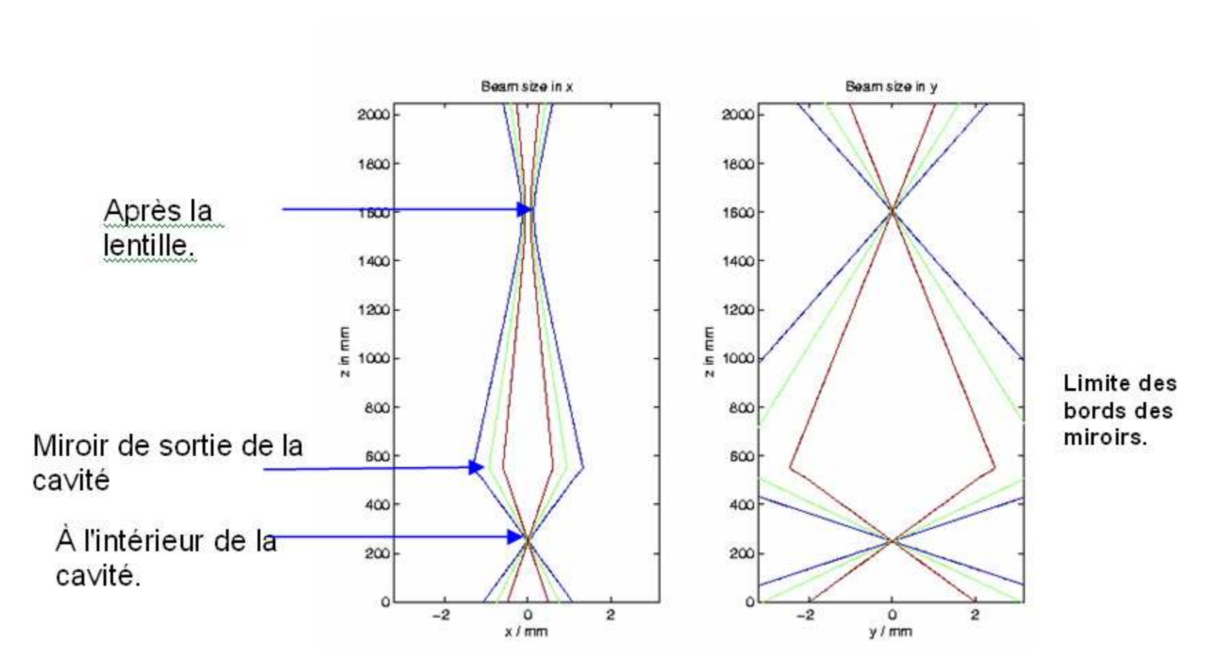


Figure 4.5. Contours du profil d'intensité de la cavité 2D.

1.2. Mesure de la taille du waist

En plus de sa stabilité, les calculs ont montré que la géométrie de cavité à quatre miroirs permettait de réduire considérablement la taille du waist du faisceau laser. Dans le chapitre 1, nous avions tracé les graphiques donnant les variations de la taille du faisceau en fonction de la distance. Nous avons trouvé un waist de l'ordre de 30 µm. Dans ce qui suit, nous allons présenter les résultats obtenus expérimentalement.

Pour faire ces mesures, nous avons utilisé un analyseur de faisceau (beam scanner) de Newport. L'analyseur de faisceau est placé sur une table de translation permettant un balayage suivant l'axe du faisceau ; la distance de référence Z0 est repérée par une règle alignée sur la direction de propagation du faisceau (cf. figure 4.6.).

La taille des modes sortant de la cavité étant supérieure à la taille du capteur de l'analyseur du faisceau, nous avons placé une lentille de focale f = 200 mm derrière le miroir de sortie de la cavité à quatre miroirs, elle permet de focaliser le faisceau dans l'analyseur.

La figure 4.7. présente la méthode utilisée pour mesurer la taille du waist dans la cavité. La partie supérieure est une représentation du dispositif expérimental. La partie inférieure de la figure 4.7. est le schéma équivalent. Le faisceau passe d'abord par le miroir sphérique qui agit comme une lentille défocalisante puis il est focalisé par la lentille avant d'arriver sur l'analyseur du faisceau.

Pour remonter à la taille du waist à l'intérieur de la cavité (W_{0e}), il suffit de connaître la taille du waist à l'extérieur (W_{0s}) de la cavité puis, en connaissant les matrices de transfert des éléments optiques et grâce à un simple calcul de transport matriciel, on remonte à la valeur de W_{0e}.

Pour mesurer la taille du waist à l'extérieur de la cavité, l'analyseur est mis en mode *trigger*. Nous avons réglé le seuil de l'intensité de manière à *trigger* sur le mode fondamental. On effectue la mesure de la taille du mode fondamental pour différentes valeurs de la distance Z. Le waist correspond à la taille minimum du faisceau. Il est à noter que toutes les mesures ont été prises dans le noir puisque l'analyseur de faisceau est très sensible à la lumière environnante.

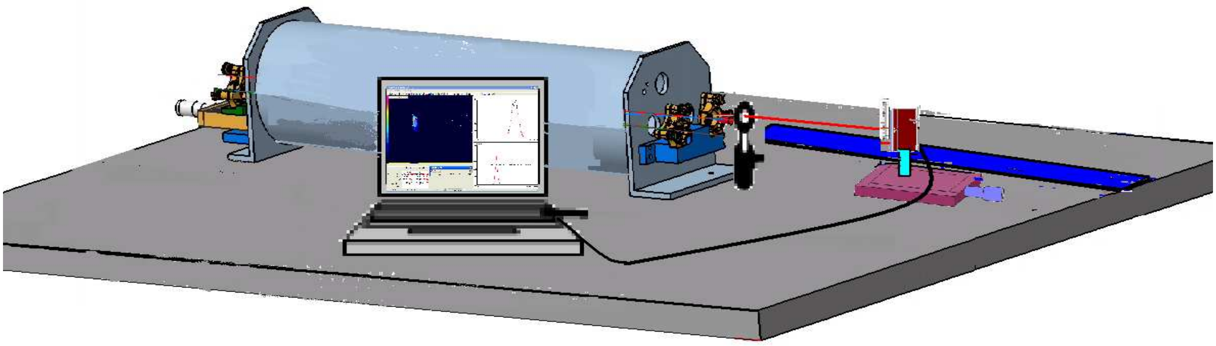


Figure 4.6. Dispositif de mesure de la taille du waist de la cavité.

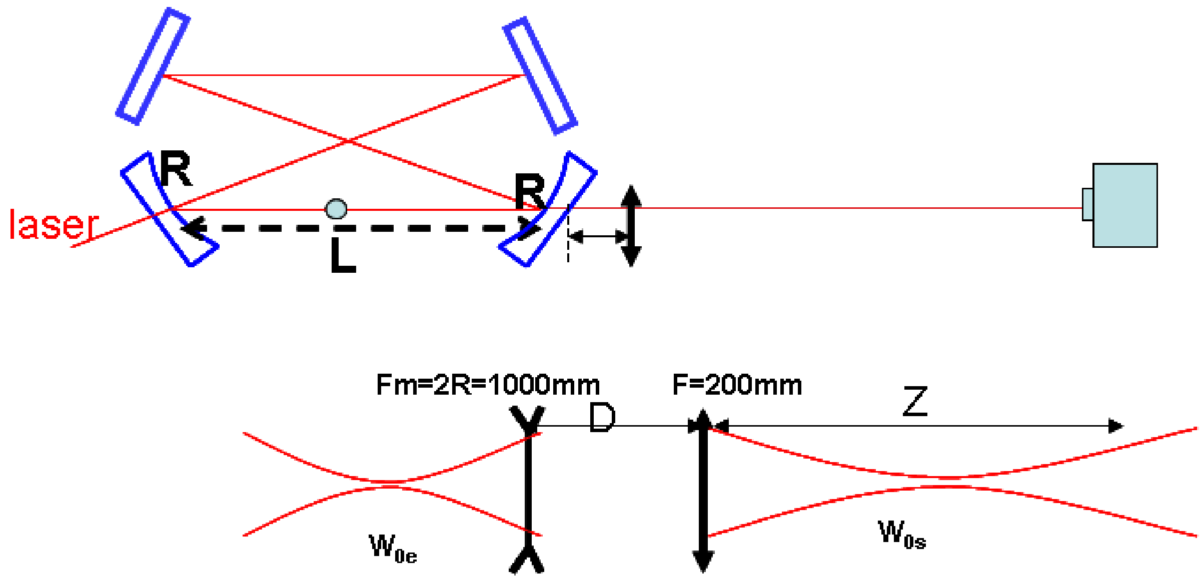


Figure 4.7. Mesure de la taille du waist de la cavité. En haut, le dispositif expérimental. En bas, le schéma optique équivalent à partir du miroir de sortie.

Les résultats obtenus sont portés sur la figure 4.8., dans le cas 2D. Avec un ajustement quadratique, nous avons obtenu pour la géométrie planaire, un waist de $w_x \approx 40$ µm sur l'axe des x et $wy \approx 12$ µm sur l'axe des y, situé à une distance de 270,2859 mm du miroir de sortie de la cavité.

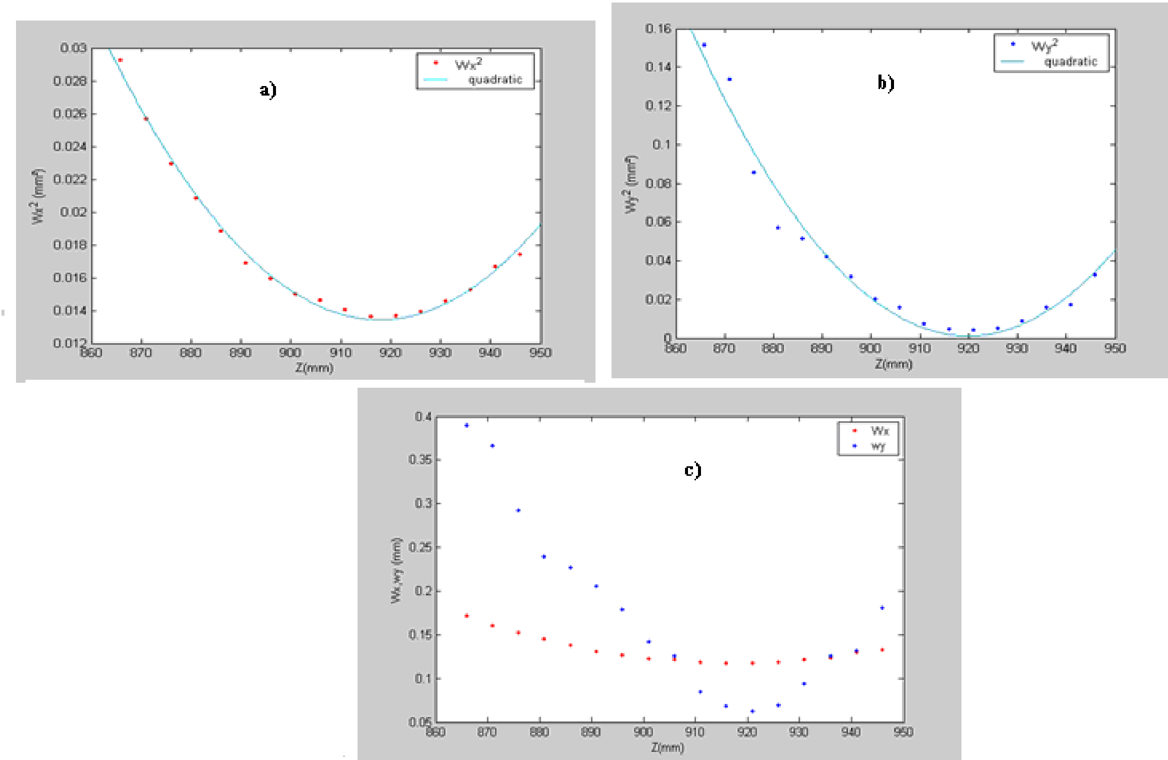


Figure 4.8. Waist de la cavité 2D a) la taille du faisceau sur l'axe x. b) la taille du faisceau sur l'axe y. c) les deux courbes superposées. Sur les figures a) et b) les points correspondent aux mesures et la ligne continue à l'ajustement quadratique.

2.2. La cavité non planaire

2.1. Mesure des profils des modes

De la même manière que pour la cavité planaire (figure 4.6), nous avons mesuré les profils d'intensité des modes pour la cavité non planaire.

La figure 4.10 représente les profils d'intensité des modes de la cavité non planaire. On retrouve la même forme de dégénérescence des modes dits astigmatiques généralisés calculés avec la méthode de rayons complexes dans le chapitre 1. Par ailleurs, en comparant ces profils des modes à ceux mesurés dans le paragraphe précédent, on constate que les modes sont moins elliptiques en 3D qu'en 2D, ce qui était prévu par les calculs théoriques (voir la figure 4.5. et la figure 4.9.).

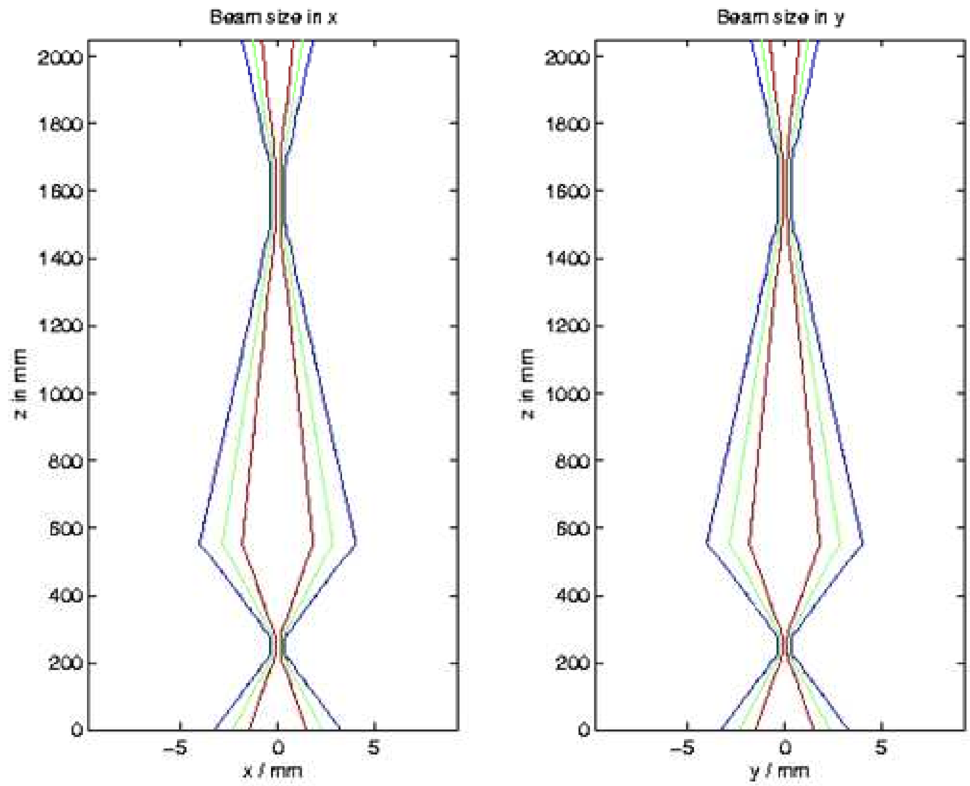


Figure 4.9. Contours du profil d'intensité du mode fondamental de la cavité 3D.

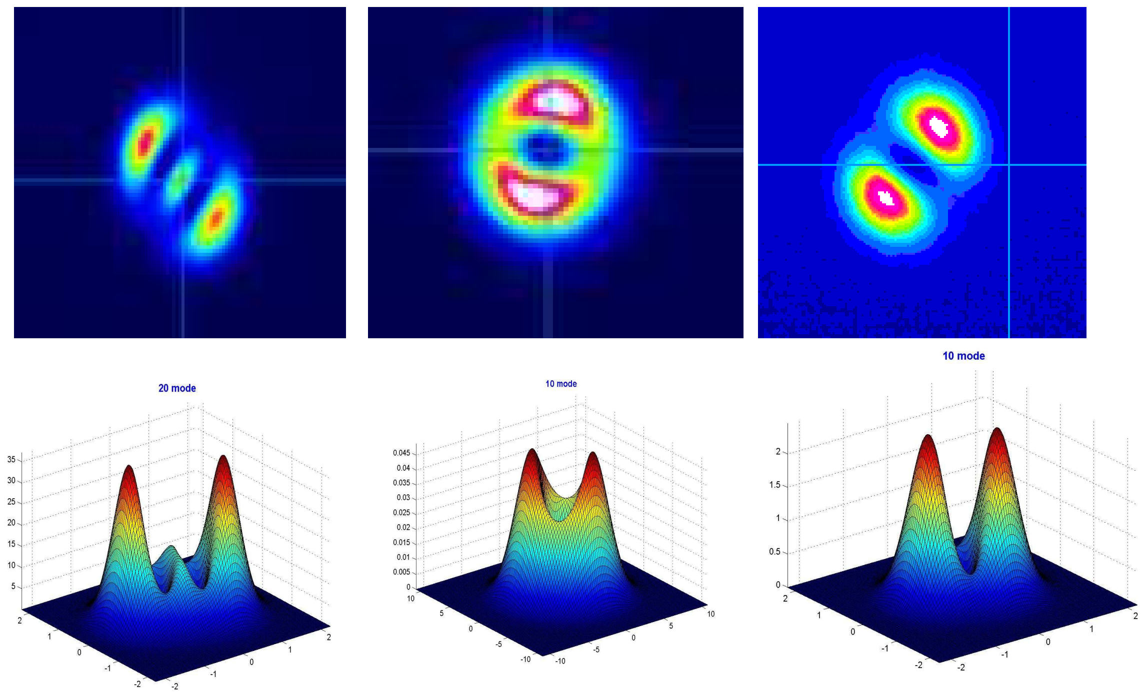


Figure 4.10. Profils d'intensité de quelques modes mesurés par une caméra CCD de la cavité à quatre miroirs en 3D.

2.2. Mesure de la taille du waist

Nous avons mesuré la taille du waist de la cavité non planaire avec la même méthode utilisée que dans le cas de la cavité planaire. Les résultats des mesures sont présentés sur la figure 4.11.

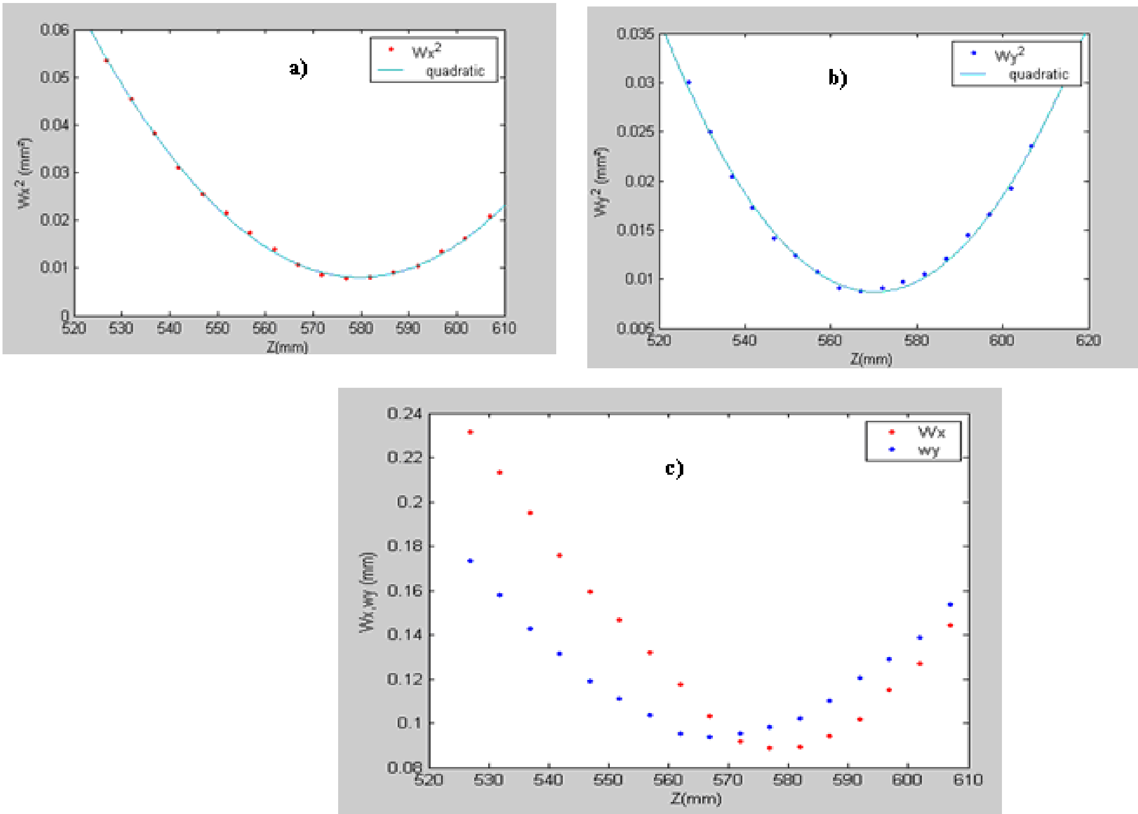


Figure 4.11. Waist de la cavité 3D a) la taille du faisceau sur l'axe x. b) la taille du faisceau sur l'axe y. c) les deux courbes superposées. Sur les figures a) et b) les points correspondent aux mesures et la ligne continue à l'ajustement quadratique.

Nous avons obtenu, pour la cavité non planaire, un waist *wx* = 54 µm et *wy* = 56 µm, situé à une distance z = 347,81 mm.

Ces mesures du waist ne sont pas en accord avec les valeurs obtenues par les calculs dans le chapitre 1. En principe, le waist de la cavité devrait se situer à mi-distance des miroirs sphériques alors qu'ici ce n'est pas le cas (dans le cas de la cavité planaire, le résultat n'était pas très précis mais proche de la réalité). Cela peut être dû à plusieurs problèmes :

Pour commencer, il faut tenir compte de la précision de l'analyseur de faisceau, cet analyseur n'est pas d'une très bonne qualité, nous l'avons choisi parce qu'il était bon marché. D'un autre côté, pour sélectionner le mode fondamental nous avons mis l'analyseur en mode *trigger*, en réglant la puissance du seuil de déclenchement, il n'est pas évident de trouver le seuil qui corresponde à un seul mode. Sur la figure 4.12., nous avons représenté tous les modes mesurés avec l'analyseur de faisceau en mode *trigger* pendant un certain temps. Nous pouvons constater qu'en réalité, on ne mesure pas le même mode à chaque fois. Ce graphique met en évidence trois populations de modes ayant différentes tailles de waist.

Par ailleurs, le fit quadratique que nous avons effectué n'est pas très précis à cause des erreurs dues au matériel et aux incertitudes de calcul, ce qui donne un minimum différent du waist.

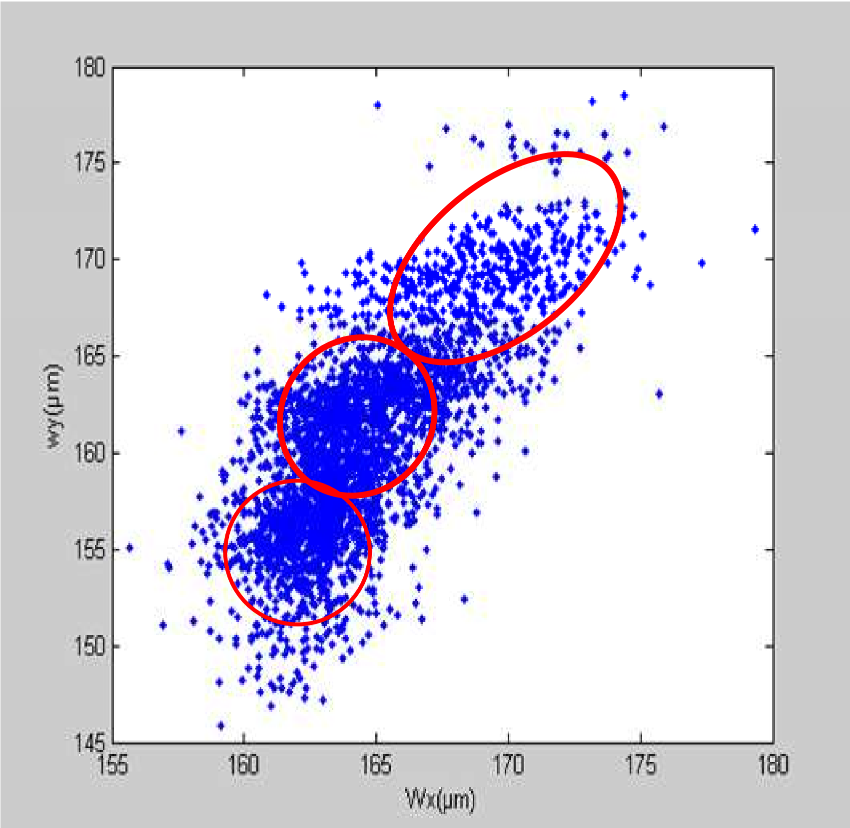


Figure 4.12. Histogramme des waists des modes mesurés par l'analyseur de faisceau en mode *trigger*.

Pour vérifier nos résultats, nous avons choisi de refaire d'autres mesures en utilisant le faisceau du laser Mira en mode continu et une nouvelle cavité (voir la figure 4.13.). Le design de cette nouvelle cavité a été fait de manière à ce qu'elle soit proche de la cavité finale en cours de développement pour ATF au KEK. Avec cette nouvelle cavité, on procure plus de souplesse pour le montage et l'on a plus de liberté pour l'alignement des miroirs.

Le dispositif expérimental est représenté sur la figure 4.14. Une lentille de focale 300 mm est placée à 205 mm après le miroir de sortie de cavité et z = 0 est pris sur la lentille (donc le z = -205 mm correspond au miroir de sortie de la cavité). Les mesures sont prises pour deux positions des miroirs, ce qui correspond à deux valeurs de concentricité, 9 mm et 11 mm. Ces deux valeurs correspondent à une position sur la platine de translation sur laquelle sont placés les miroirs.

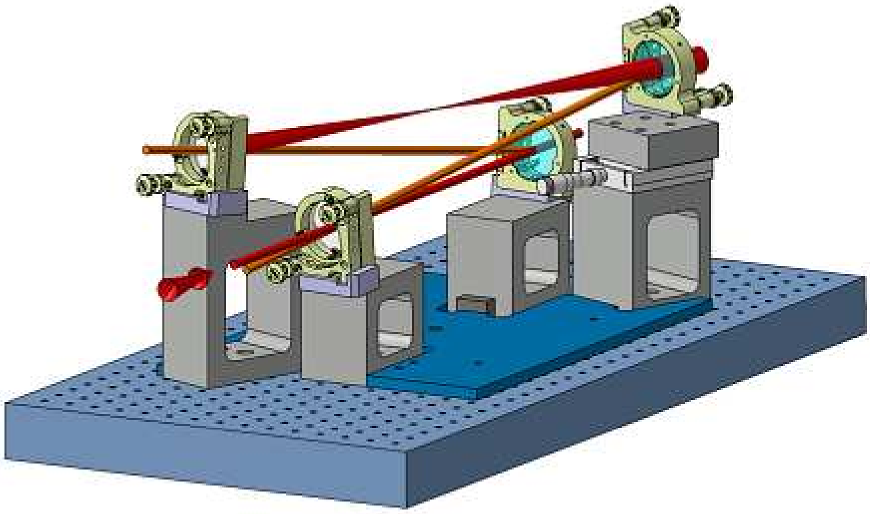


Figure 4.13. Dessin 3D de la nouvelle cavité à quatre miroirs.

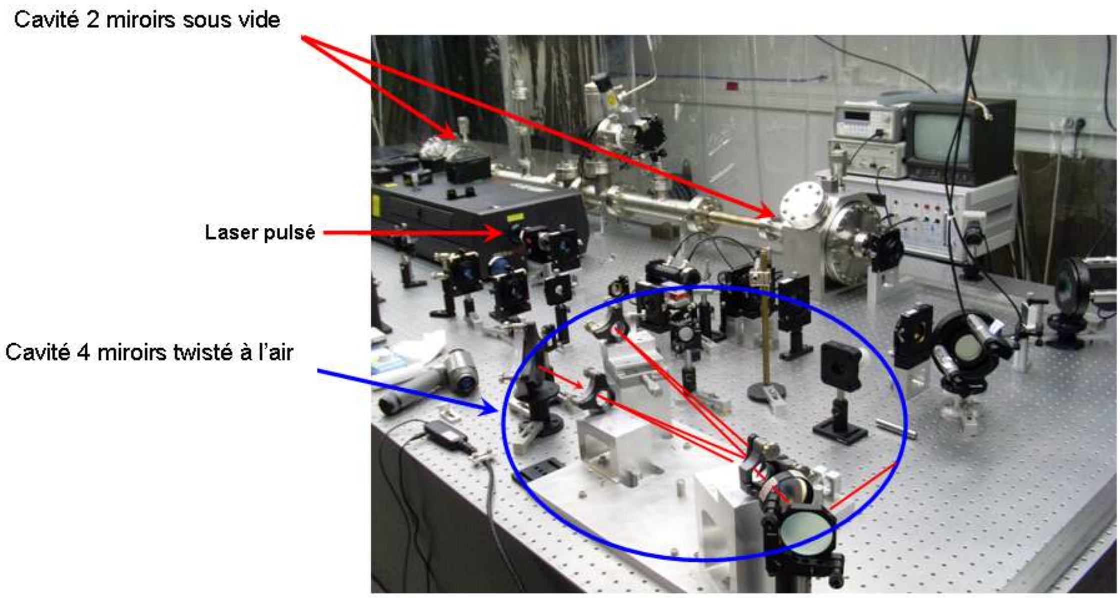


Figure 4.14. Vue du nouveau dispositif expérimental. La cavité à quatre miroirs est placée sur la table optique, à côté de la cavité à deux miroirs.

Les mesures ne sont toujours pas très précises car la cavité n'est pas asservie, donc nous sommes obligés de faire des acquisitions en mode *trigger*. Par ailleurs, pour la position 11 mm, le faisceau est plus large que la caméra lorsque z est proche de 0 (c'est-à-dire, juste après la lentille). D'autre part, nous avons remarqué que les mesures étaient peu précises au voisinage du waist.

Pour tracer les courbes, nous n'avons pas fait de fit, les calculs sont faits en variant la distance entre les 2 miroirs sphériques pour la position 9 mm jusqu'à ce que l'on ait un bon accord à l'œil, puis on ajoute 2 mm pour produire des courbes à 11 mm. Nous avons fait cela car les précisions des mesures sont trop mauvaises pour faire des fits.

On obtient alors :

La figure 4.15. représente les waists de la cavité pour la position 9 mm. Lorsque l'on extrapole dans la cavité, les waists obtenus sont de ~ 65 et ~ 72 µm. La figure 4.16. représente les waists pour la position 11 mm. Les waists obtenus sont ~ 50 et ~ 65 µm ce qui correspond donc à un sigma aussi petit que 25 µm.

Si l'on augmente la confocalité, c'est-à-dire qu'on rapproche encore plus les miroirs, le faisceau commence à ressembler à un S comme nous l'avons vu avec la première cavité, on pense que ce n'est pas dû à de la diffraction sur les bords des miroirs et pour le prouver on va refaire l'expérience avec des miroirs de 2 pouces. Nous allons essayer d'asservir la cavité et nous allons nous doter d'une caméra CCD plus performante.

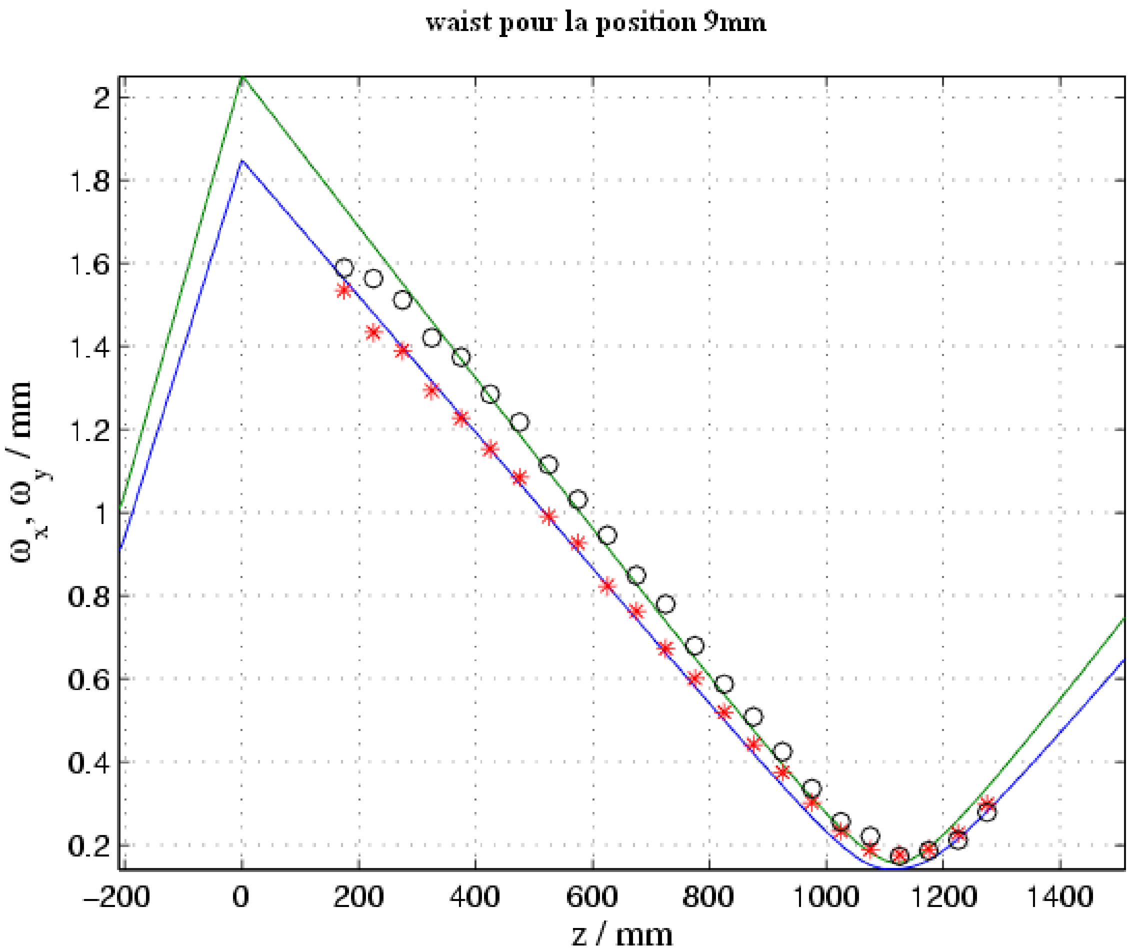


Figure 4.15. Taille du faisceau en fonction de la distance de propagation pour la position 9 mm. Les traits pleins correspondent aux calculs, les ronds et les étoiles correspondent aux mesures.

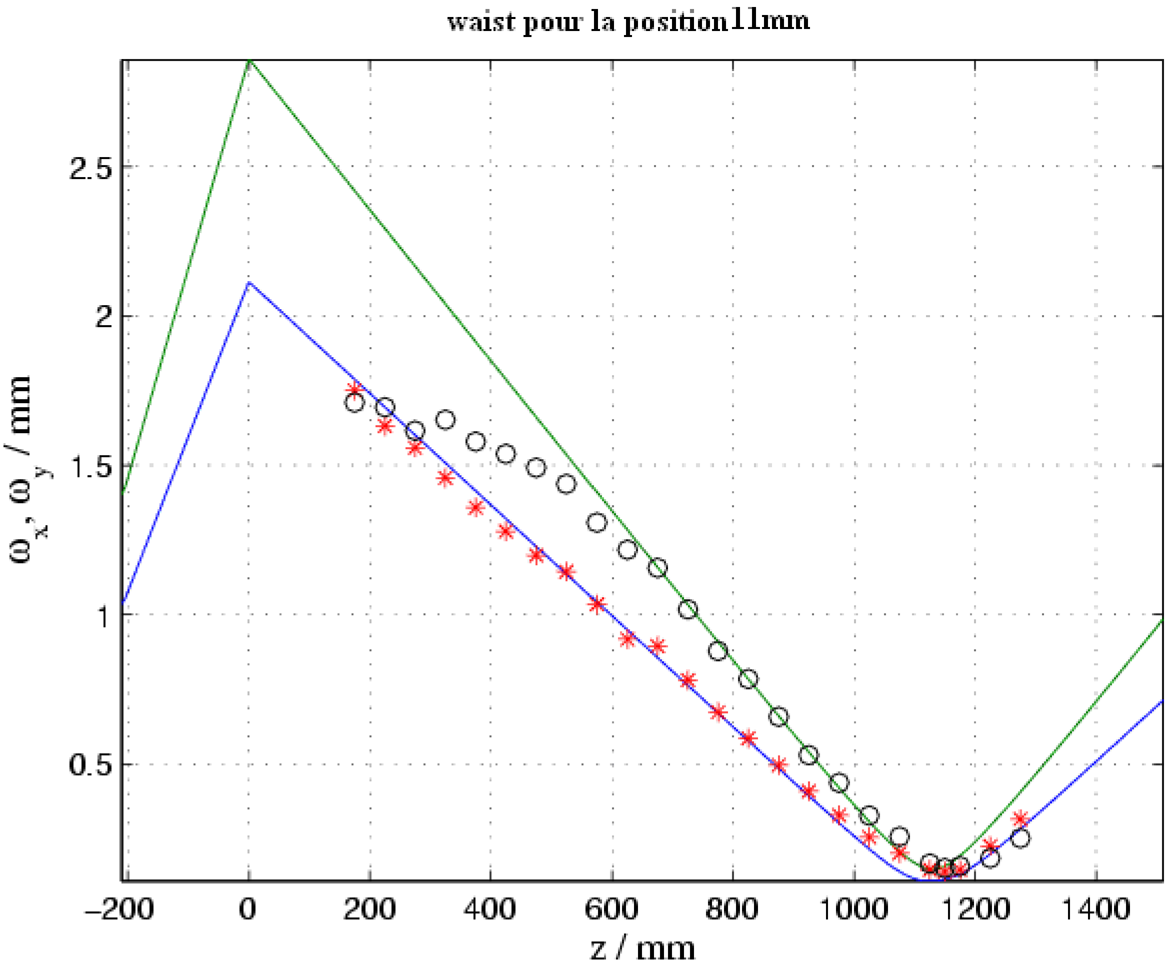


Figure 4.16. Taille du faisceau en fonction de la distance de propagation pour la position 11 mm. Les traits pleins correspondent aux calculs, les ronds et les étoiles correspondent aux mesures.

Sur la figure 4.17. et la figure 4.18., nous avons représenté l'orientation de l'ellipse d'intensité en fonction de z. Nous avons ajouté 40 ou 50 degrés car le calcul est fait dans le plan d'incidence du miroir de sortie qui est incliné de 40 degrés par rapport au plan horizontal qui est le plan de mesure de la CCD. Comme on ne sait pas si l'axe de référence est vertical ou horizontal, nous avons mis les deux angles de rotation possibles pour comparer calculs et mesures.

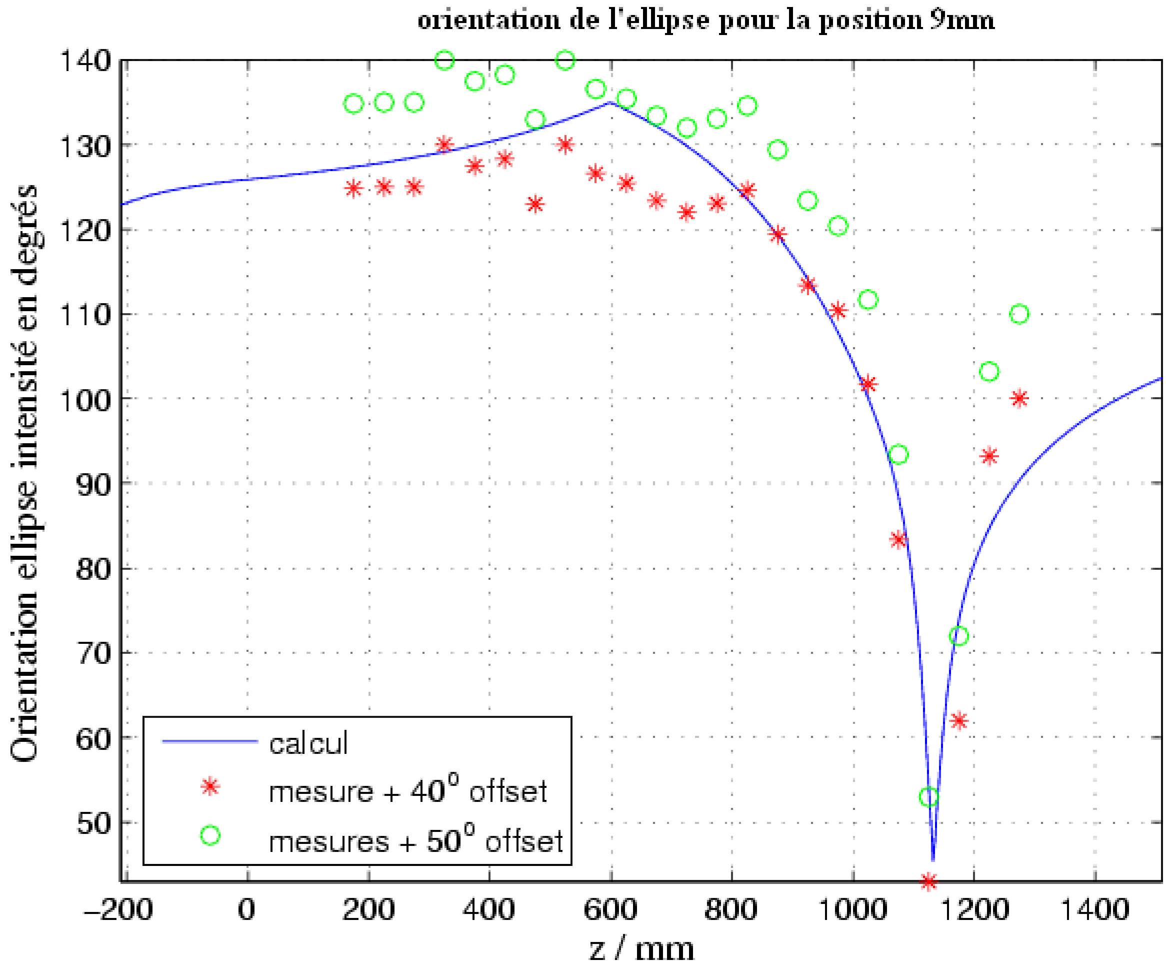


Figure 4.17. Orientation de l'ellipse de l'intensité en fonction de la distance pour la position 9 mm.

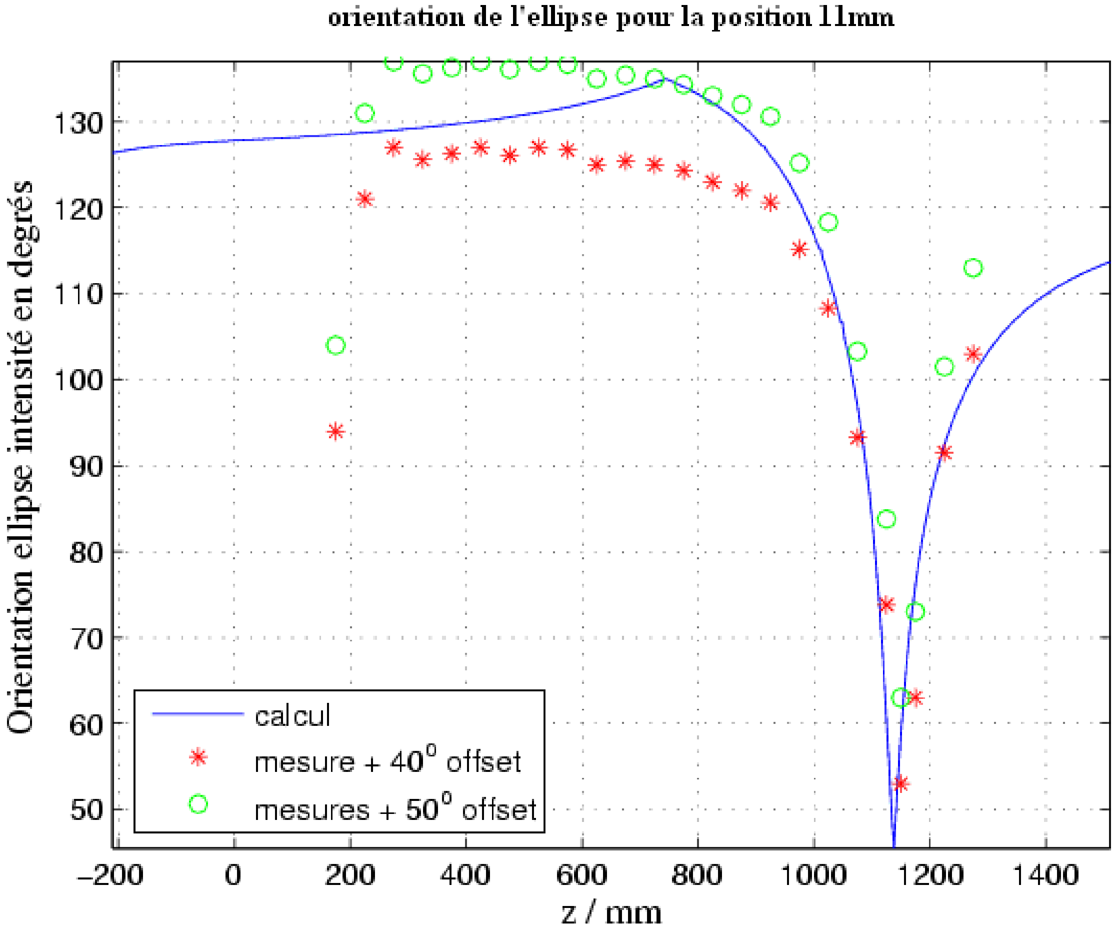


Figure 4.18. Orientation de l'ellipse de l'intensité en fonction de la distance pour la position 11 mm.

L'utilisation du nouveau montage avec le faisceau du Mira qui présente un profil plus propre que la diode laser et l'amélioration du trigger nous ont permis de prendre de meilleures mesures. Nous avons pu retrouver les résultats des calculs théoriques.

Cette étude nous a permis de constater les avantages que peux apporter un résonateur à quatre miroir dans ces deux configurations pour des applications de productions de rayonnement par interaction Compton entre un faisceau laser puissant et un faisceau d'électron. Puis nous avons testé expérimentalement les résultats de nos calculs. Les résultats des expériences se sont révélé en parfait accord avec les calculs théoriques.

Conclusion Générale

Le premier objectif de cette thèse était l'étude et la conception d'une cavité Fabry Pérot haute finesse. Cette cavité est destinée pour des applications de diffusion Compton d'un faisceau laser de puissance sur un faisceau d'électrons. Elle va être utilisée sur deux projets : Le projet RADIOTHOMX, qui consiste en la production de rayons X monochromatiques dans un anneau (ou un accélérateur linéaire à recouvrement d'énergie ERL) pour des applications médicales, et la source de positrons polarisés pour les futurs collisionneurs linéaires ILC et CLIC.

Afin d'augmenter la luminosité de l'interaction Compton, les applications des cavités optiques pour la production de rayonnement nécessitent d'un coté, des puissances très élevées, et d'un autre coté des tailles de waists très réduites aux points d'interactions laser-électrons. Pour répondre à ces exigences, le résonateur optique doit présenter une grande stabilité mécanique et de polarisation, sans quoi le gain de puissance diminue considérablement dans le temps.

Il existe des géométries de résonateurs optiques qui permettent de s'affranchir des instabilités mécaniques et de polarisation, présentées par une cavité standard à deux miroirs. Ces géométries permettent en même temps de réaliser des waists de très petites dimensions transverses. Dans ce travail, nous avons considéré le cas des cavités à quatre miroirs pliées en Z ou en U et une configuration tétraédrique *'bow-tie'*, chacune de ces configurations peut être soit planaire, où tous les miroirs sont sur un même plan, soit non planaire, où deux miroirs sont dans un plan perpendiculaire au plan des deux autres miroirs.

Des calculs de stabilité mécanique et des états de polarisation de ces différentes géométries à quatre miroirs ont été faits. Nous avons montré numériquement le fait que la géométrie tétraèdrique présentait une grande stabilité mécanique et compensait les instabilités de polarisation engendrées par les désalignements des miroirs. Grâce à ces calculs, nous avons montré numériquement qu'une cavité à quatre miroirs en "bow-tie" dans sa configuration non planaire permettait d'atteindre une grande stabilité mécanique et une grande stabilité des états de polarisation. Et nous avons conclu que cette géométrie est le meilleur choix pour les applications telles que l'anneau médical RADIOTHOMX et la source de positrons polarisés pour les collisionneurs ILC et CLIC.

Nous avons calculé numériquement les modes propres de la géométrie en "bow-tie" planaire et non planaire. Ce calcul est basé sur la théorie des rayons complexes. Nous avons montré la différence entre les profils d'intensité des modes propres d'une cavité planaire, qui sont semblables à ceux d'une cavité à deux miroirs, et les profils d'intensité des modes d'une cavité non planaires, qui présentent une forme dite astigmatisme générale. Les tailles des waists ont été également calculées, nous avons constaté que ce genre de géométrie permettait d'atteindre des waists d'environ 30 μm.

Expérimentalement, un prototype de cavité à quatre miroirs a été développé. Nous avons construit un système de diode laser en configuration Littrow et testé les résultats des calculs théoriques. Les profils des modes propres ainsi que les tailles des waists, dans les deux configurations planaire et non planaire, ont été mesurés. Nous avons pu mesurer des tailles de waist de l'ordre de 50µm, avec le système à l'air sans asservissement ni isolation. Nous avons vérifié que les profils d'intensité des modes mesurés expérimentalement présentaient la même forme que les profiles d'intensité des modes obtenus avec les calculs. En ce qui concerne la taille du waist, avec notre système de diode laser, nous avons constaté que les mesures n'étaient pas en accord avec les résultats des calculs. Pour améliorer nos mesures, une autre cavité à quatre miroirs, qui présente plus de flexibilités de réglages par rapport à la première, à été construite. Pour avoir des mesures plus *propres*, cette cavité a été alimentée par le laser Titane Saphir (*Mira*), qui présente un faisceau de meilleure qualité que le faisceau de la diode laser. Nous avons refait les mesures de la taille du waist avec ce nouveau montage et nous avons obtenu des résultats en bon accord avec les calculs.

Cette étude expérimentale a été réalisée avec une cavité à l'aire et non asservie. Durant ma thèse, notre groupe a construit une cavité Fabry Pérot confocale à deux miroirs et validé un système d'asservissement basé sur la technique de Pound Driver Hall. Grace à ce système d'asservissement, le laser a été asservi sur la cavité Fabry Pérot en fréquence en mode pulsé. Une finesse de 3600, ce qui correspond à un gain en puissance de ~1200, a été atteinte avec des miroirs de basse finesse. Des miroirs de très haute finesse (F=30 000) ont été montés et un système d'asservissement est en train d'être mis en place pour atteindre des gains en puissance de l'ordre de 10^4 (voir 10^5).

Par la suite, la cavité Fabry Pérot à quatre miroirs pourra être asservie, grâce au système d'asservissement qui a été développé, ainsi les résultats obtenus pourront être améliorés. De nouvelles études, nécessitant de grande finesse, restent à faire comme la mesure de la polarisation du faisceau dans la cavité qui est un facteur très important pour la source de positrons polarisés. Par ailleurs, une nouvelle cavité à quatre miroirs, plus adaptés à l'environnement d'un accélérateur, est en cours de développement au laboratoire. Cette cavité va être implantée sur l'accélérateur ATF du laboratoire KEK au Japon à la fin de l'année 2009.

Le deuxième objectif de cette thèse était l'étude de l'impacte des interactions Compton sur la dynamique transverse (la source de positrons polarisés des collisionneurs ILC et CLIC) et la dynamique longitudinale (anneau médical RADIOTHOMX) des faisceaux d'électrons. Nous avons donc fait une étude du transport d'enveloppe du faisceau d'électrons pour la source de positrons polarisés des collisionneurs linéaires ILC et CLIC. Pour atteindre la charge de positrons polarisés nécessaire pour ces deux collisionneurs, les physiciens ont proposé l'idée de faire plusieurs points de collisions Compton avec des faisceaux d'électrons et des faisceaux laser de dimensions transverses très réduites. Dans ce travail, l'optique de la ligne de focalisation sur les points de collisions a été déterminée. Un modèle de transport d'enveloppe, basé sur un calcul matriciel, tenant compte de l'interaction Compton a été développé. Nous avons montré qu'au bout de dix interactions, l'effet de l'interaction Compton sur l'enveloppe du faisceau était très important, l'émittance du faisceau devenait de plus importante. Les résultats obtenus par le modèle ont été comparés aux résultats obtenus avec le logiciel CAIN qui fait le transport du faisceau particule par particule. Nous avons ainsi vérifié qu'il était possible d'étudier le transport du faisceau, en présence de l'effet Compton, avec un programme rapide et simple d'utilisation. Pour s'affranchir de ce problème d'augmentation d'émittance, il a été proposé de limiter le nombre de points d'interactions à cinq au lieu de dix.

Pour l'anneau médical RADIOTHOMX, une étude de la dynamique longitudinale du faisceau dans l'anneau a été réalisée. Nous avons utilisé un programme qui permet d'étudier la dynamique longitudinale du faisceau en présence d'interaction Compton. Cette étude avait pour but de déterminer l'allongement du paquet du à l'interaction Compton et de calculer la perte de flux de rayons X produits qui en résulte après chaque tours de l'anneau.
Nous avons étudié l'impact de quelques paramètres tels que l'angle de croisement, la taille du faisceau laser, le facteur de compression des moments et de la longueur du paquet injecté sur la dynamique du faisceau ainsi que sur le flux de rayons X produits.

Les simulations que nous avons faites, nous ont permis de constater l'influence de chacun des paramètres sur le flux de rayons X produit et de faire ressortir un ensemble de paramètres permettant de réaliser un flux de l'ordre de 10^{13} photons/s, qui la valeur requise pour des applications de radiothérapie. Puis, pour se donner plus de flexibilité pour la réalisation de la machine, comme la charge des paquets d'électrons et les dimensions transverses du faisceau d'électrons et le faisceau laser, les contraintes sur les paramètres ont été revues en baisse.
Avec ces paramètres, nous avons obtenu un flux de l'ordre de 10^{11}*photons/s*.

Ils restent encore d'autres paramètres, qui influencent le flux produit, à investiguer, comme le synchronisme des deux faisceaux, pour permettre de maitriser le flux et de choisir l'optique de la machine en conséquence.

ANNEXES

A. Transport

TRANSPORT est un programme conçu pour calculer le transport du faisceau dans un accélérateur. Il est basé sous un formalisme matriciel. Les éléments de la ligne du faisceau sont caractérisés par leurs matrices de transfert. Les fichiers de sortie de TRANSPORT donnent une matrice σij définissant les dimensions du faisceau, les paramètres σii représentent la grandeur totale divisée par deux au carré. Chaque élément sera introduit à l'aide des coefficients de la matrice R au moyen du calcul exact des fonctions caractéristiques, en excluant donc l'approximation lentille mince.

Comme l'effet de la charge d'espace n'est pas inclu, TRANSPORT ne s'applique que pour des faisceaux relativistes. Les composants des lignes qui peuvent être introduits sont essentiellement : les espaces de glissement, les quadripôles, les solénoïdes, les dipôles déflecteurs, les sextupôles et les sections accélératrices. Par ailleurs, il est possible de calculer l'effet du désalignement des éléments magnétiques, le déplacement du centre de masse du faisceau, d'introduire la masse de la particule, de calculer les corrections pour les champs de fuite, d'effectuer le calcul de la matrice du second ordre, etc.

TRANSPORT donne aussi la possibilité d'ajuster les paramètres de la matrice du faisceau aussi bien que ceux des éléments de ligne, ce qui est très utile.

B. Optiques des faisceaux gaussiens

Équation d'onde paraxiale

Dans un milieu isotrope, amagnétique et sans charge, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{III.2.5}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\mu\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \tag{III.2.6}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0 \tag{III.2.7}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\varepsilon\vec{E} = 0 \tag{III.2.8}$$

Avec $\vec{H}$ et $\vec{E}$ les champs magnétique et électrique respectivement
ε et μ la permittivité électrique et perméabilité magnétique du milieu.

Les deux premières équations donnent :

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) = -\varepsilon\mu\cdot\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \tag{III.2.9}$$

or

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) - \overrightarrow{\nabla^2}\vec{E} \tag{III.2.10}$$

À partir de là, on dérive l'équation de propagation d'une onde dans un milieu homogène :

$$\overrightarrow{\nabla^2}\vec{E} - \varepsilon\mu\cdot\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{III.2.11}$$

Dans le cas d'un milieu parfaitement isolant, ε est réel, les solutions de l'équation de propagation sont de la forme :

$$\vec{E}\left(x,y,z,t\right) = \Re e\left|\vec{e}\left(x,y,z,t\right)\cdot e^{i\omega t}\right| \tag{III.2.12}$$

En introduisant le vecteur d'onde $k = \frac{n\cdot\omega}{c}$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide et n son indice optique. Dans le cas du vide n = 1, l'équation de propagation se ramène à :

$$\overrightarrow{\nabla^2}\vec{e} + k^2\vec{e} = \vec{0} \tag{III.2.13}$$

On cherche des solutions de cette équation de la forme :

$$\vec{e} = \vec{e_0} \cdot \Psi(x,y,z) \cdot e^{-ikz} \tag{III.2.14}$$

En introduisant la solution dans l'équation de propagation, on obtient :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - 2ik\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \tag{III.2.15}$$

Dans l'hypothèse paraxiale, valable dans le cas d'une onde laser, si les variations de $\Psi(x,y,z)$ selon z sont lentes devant la longueur d'onde et devant les variations transverses

$$\left|\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}\right| \ll \left|2ik\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right| \approx \left|\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right| \approx \left|\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right| \tag{III.2.16}$$

Sous ces conditions $\Psi(x,y,z)$ est la solution de l'équation d'onde paraxiale :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - 2ik\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \tag{III.2.17}$$

La résolution de l'équation paraxiale conduit à une onde gaussienne dont on étudiera le mode fondamental et les modes supérieurs. La solution la plus simple est le mode fondamental gaussien.
Dans ce qui suit, nous décrirons brièvement les propriétés de propagation d'un faisceau gaussien dans son mode fondamental, puis dans les modes supérieurs. Puis nous décrirons l'effet d'un résonateur optique sur la structure de l'onde gaussienne.

L'expression du mode fondamental gaussien est :

$$\Psi(x,y,z) = e^{-i\left[P(z) + \frac{k}{2q(z)}\left(x^2+y^2\right)\right]} \tag{III.2.18}$$

Le paramètre $P(z)$ est la phase de l'onde, et le paramètre $q(z)$ le rayon de courbure du front d'onde défini conventionnellement par :

$$\frac{1}{q(z)} \equiv \frac{1}{R} - \frac{i\lambda}{\pi\omega^2} \tag{III.2.19}$$

Où R est le rayon de courbure de l'onde sphérique et ω la demi-largeur de la distribution en intensité du faisceau. En reportant l'expression $\Psi(x,y,z)$ dans l'équation d'onde, on obtient les deux équations suivantes :

$$q(z) = q_0 + z \tag{III.2.20}$$

$$\frac{dP(z)}{dz} = -\frac{i}{q(z)} \tag{III.2.21}$$

À partir des équations précédentes, en combinant les deux expressions de $q(z)$ et en identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient l'expression du rayon de courbure et la taille du faisceau :

$$R(z) = z\left[1+\left(\frac{z}{Z_R}\right)^2\right] \quad \text{(III.2.22)}$$

$$\omega^2(z) = \omega_0^2\left[1+\left(\frac{z}{Z_R}\right)^2\right] \quad \text{(III.2.23)}$$

Où Z_R est la longueur de Rayleigh définie par la relation :

$$Z_R = \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda} \quad \text{(III.2.24)}$$

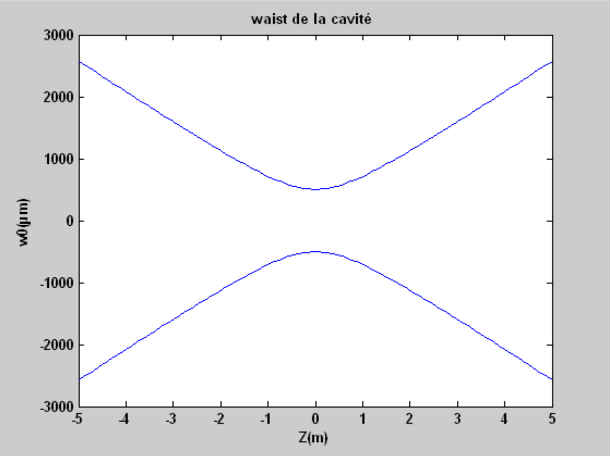
$\omega(z)$ est la taille du faisceau suivant sa direction de propagation, elle définit une hyperbole dont une des asymptotes est l'axe incliné d'un angle $\theta = \frac{\lambda}{\pi\omega_0}$. L'angle θ définit la demi-ouverture du faisceau ou sa divergence.
La taille minimale ou (waist) du faisceau correspond à un rayon de courbure infini, autrement dit, c'est la taille du faisceau dans le plan où le front d'onde est celui d'une onde plane.
L'expression de la phase est donnée par :

$$e^{-iP(z)} = \frac{\omega_0}{\omega(z)}e^{i\Phi(z)} \quad \text{(III.2.25)}$$

Où $\Phi(z)$ est le déphasage de Gouy défini par :

$$\Phi(z) = \arctan\left(\frac{\lambda z}{\pi\omega_0^2}\right) \quad \text{(III.2.26)}$$

Pour notre cavité, le rayon de courbure des miroirs R = 2 m, la longueur de la cavité L = 1 940 et la longueur d'onde du laser est λ = 800 nm. L'évolution du waist en fonction de la distance de propagation z est représentée sur la figure ci-dessous :



C. Couplages de la cavité aux modes d'ordres supérieurs

Un faisceau gaussien est entièrement défini par sa taille minimale appelée “waist” w_0 et sa distance de Rayleigh. La distance de Rayleigh est la distance z_0 (annexe) **[82]**, au bout de laquelle le “waist” est multiplié par $\sqrt{2}\left(w(z_0)=\sqrt{2}w_0\right)$ (Figure C.1). On définit également le rayon de courbure $R(z)$ d'un faisceau gaussien qui dépend de la distance par rapport à la position du waist suivant l'axe de propagation par la relation (on suppose que l'origine de l'axe z est située au niveau du waist w_0) :

$$R(z)=z+\frac{z_0}{z} \qquad \text{(III.2.27)}$$

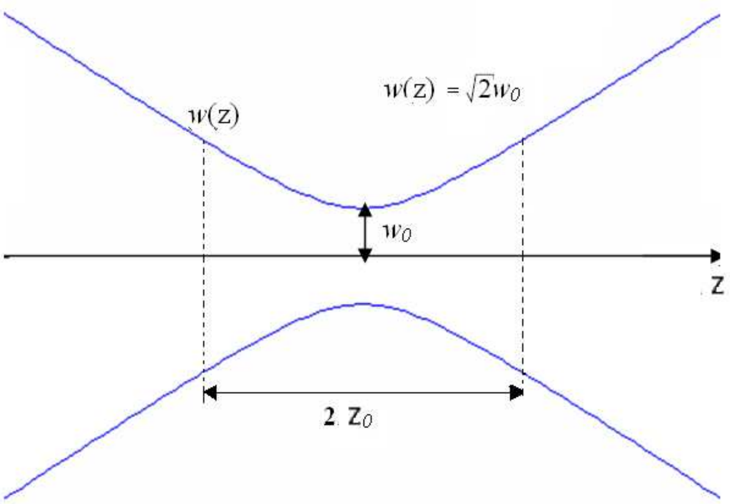


Figure C.1. Taille du faisceau en fonction de la distance de propagation.

La valeur du waist définie par la cavité peut être calculée à partir d'équations simples dépendant des paramètres des miroirs et de la longueur de la cavité. Ces équations sont déduites de la condition d'autoréplication du faisceau dans la cavité. Cette condition stipule que le rayon de courbure du faisceau incident doit être égal au rayon de courbure des miroirs lorsque le faisceau rencontre la surface des miroirs afin de minimiser les pertes par diffraction. La condition d'autoréplication s'exprime alors par :

$$\begin{aligned} R(d_1)&=d_1+\frac{z_0^2}{d_1}=R_1 \\ R(d_2)&=d_2+\frac{z_0^2}{d_2}=R_2 \end{aligned} \qquad \text{(III.2.28)}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} -d_1&=\frac{L\left(R_2-L\right)}{R1+R2-2L} \\ d_2&=\frac{L\left(R_1-L\right)}{R1+R2-2L} \end{aligned} \qquad \text{(III.2.29)}$$

Dans le cas où les deux miroirs ont le même rayon de courbure, le waist w_0 au centre de la cavité et la taille du faisceau sur les miroirs w_1 sont donnés par les

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}}\left(L\left(2R-L\right)\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{\lambda L}{2\pi}}\left(\frac{1+g}{1-g}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{III.2.30}$$

$$w_1 = \sqrt{\frac{\lambda L}{\pi}}\left(\frac{1}{1-g^2}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{III.2.31}$$

Où $g = 1 - \frac{L}{R}$ est le paramètre de stabilité de la cavité.

Dans le cas de notre cavité, les rayons de courbure des miroirs sont égaux R = 2 m et la longueur de la cavité est L = 1,940 m. Les tailles du faisceau au centre de la cavité et sur les miroirs sont donc w_0 = 504,5 µm et w_1 = 703 µm. Le paramètre g vaut g = 0,03. La distance de Rayleigh du laser dans la cavité est $z_0 \approx 1$ m.

1. Défauts de l'alignement du faisceau

Le champ électromagnétique du faisceau laser dans la cavité est la superposition de gaussiens, dans une base orthonormée directe *oxyz* et choisissant l'axe z comme l'axe de propagation et x et y transverses à cet axe, dans la limite de l'approximation paraxiale. Ce champ peut être exprimé sous la forme :

$$E(x,y,z) = \sum \alpha_{mn} f_{nm}(x,y,z) \tag{III.2.32}$$

Les fonctions $f_{nm}(x,y,z)$ sont les modes gaussiens qui peuvent être de type Hermite-Gauss ou Lagerre-Gauss. Dans ce qui suit, la base utilisée est celle des modes d'Hermite-Gauss.
À une dimension, la solution de l'équation d'onde dans l'approximation paraxiale peut être exprimée par la superposition de modes $f_n(x,z)$.
Les modes d'Hermite-Gauss dans la représentation à deux dimensions, sont donnés par la formule :

$$f_{nm}(x,y,z) = f_n(x,z)\, f_m(y,z)\, \exp(-jkz) \tag{III.2.33}$$

Dans le souci de simplifier la démonstration, on ne considérera que les fonctions à une dimension $f_n(x,z)$, que l'on notera $f_n(x)$, puisque le traitement est identique dans les deux directions transverses x et y.

Le mode fondamental et le mode d'ordre 1 et 2 peuvent s'écrire, en z = 0 (centre de la cavité) et ne considérant que la direction x, sous la forme :

$$f_0\left(x\right) = \exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right) \tag{III.2.34}$$

$$f_1\left(x\right) = \exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right) \times \frac{x}{w_0} \times \sqrt{2\pi} \tag{III.2.35}$$

$$f_1\left(x\right) = \left(4x^2 - 1\right)\exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right) \tag{III.2.36}$$

Où l'on a omis le facteur de normalisation des fonctions $f_n(x)$ [89].

À présent, considérons un faisceau que l'on veut coupler à une cavité Fabry Pérot. Dans le plan du waist du faisceau, on écrit le champ sous la forme : $E(x) = Af_0(x)$. Le traitement qui suit est similaire à celui développé dans la référence [90] (cette approche a été généralisée pour des systèmes optiques plus complexes par [91]). On notera $E_2(x)$ l'expression du champ dans le résonateur pour le différencier du champ incident $E(x)$.
Si le faisceau incident est décalé latéralement d'une quantité Δx par rapport à l'axe optique de la cavité (Figure C.2.), le champ dans la cavité est donné par :

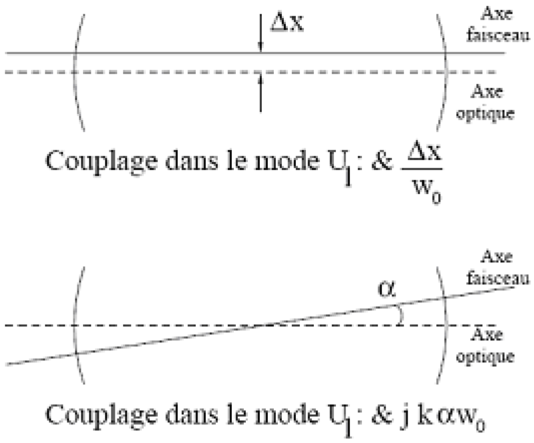


Figure C.2. Désalignements de l'axe optique par rapport à l'axe de la cavité.

$$E_2(x) = A \times f_0(x - \Delta x) = A \times \exp\left(-\frac{(x-\Delta x)^2}{w_0^2}\right) \qquad \text{(III.2.37)}$$

Pour $\Delta x \ll 1$, le développement au premier ordre de (III.2.37) donne :

$$E_2(x) = A \times \left(f_0(x) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Delta x}{w_0} f_1(x) \right) \qquad \text{(III.2.38)}$$

Un décalage latéral est donc équivalent à l'addition d'un terme du premier ordre en phase avec le mode fondamental. Autrement dit, le faisceau se couple avec la cavité dans son mode fondamental et un mode d'ordre supérieur.

Si maintenant l'axe faisceau est incliné d'un angle α par rapport à l'axe optique mais croise l'axe optique au niveau du plan du waist $(\Delta x = 0)$, l'expression du champ est alors :

$$E_2(x) = A \times \exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right) \exp(jk\alpha x) \qquad \text{(III.2.39)}$$

Le développement au premier ordre en α donne :

$$E_2(x) = A \times \left(f_0(x) + j \frac{kw_0}{\sqrt{2\pi}} \alpha f_1(x) \right) \qquad \text{(III.2.40)}$$

L'inclinaison du faisceau provoque un couplage dans le mode d'ordre 1 avec un déphasage de $\frac{\pi}{2}$.

Pour résumer, le désalignement angulaire ou spatial, de l'axe du faisceau par rapport à l'axe de la cavité, conduit un couplage du faisceau à des modes d'ordres supérieurs de la cavité. Cet effet se traduit par une perte de la puissance stockée dans la cavité.

2. Effet de l'adaptation du faisceau

Si maintenant, la position du waist du faisceau incident est décalée d'une distance d par rapport à la position du waist défini par la cavité (Figure C.3.), le front d'onde devient dans ce cas courbe au lieu d'être plan. Supposons que la taille du waist du faisceau incident est $w = w_0$. Le rayon de courbure inverse dans le plan du waist défini par la cavité est légèrement différent de zéro et on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{R(d)} &= \frac{1}{d(1+\frac{z_R^2}{d^2})} \\ &= \frac{1}{d(1+\frac{\pi^2 w_R^4}{\lambda^2 d^2})}\end{aligned} \quad \text{(III.2.41)}$$

En z = 0, le champ s'écrit sous la forme :

$$E_2(x) = A\times\exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2} - j\frac{kx^2}{2R(d)}\right) \quad \text{(III.2.42)}$$

Avec $\frac{1}{R(d)} \ll 1$, en développant (III.2.42) au 1er ordre, on obtient :

$$E_2(x) = A\times\left(f_0(x) - \frac{kw_0^2}{8R(d)}\left(f_2(x) + f_0(x)\right)\right) \quad \text{(III.2.43)}$$

Si $d \ll z_R$, on obtient :

$$E_2(x) = A\times\left(f_0(x) - j\frac{2}{2kw_0^2}\left(f_2(x) + f_0(x)\right)\right) \quad \text{(III.2.44)}$$

Si le front ne possède pas la bonne courbure dans le plan du waist défini par la cavité, alors on observera un couplage dans un mode du second ordre avec un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ par rapport au mode fondamental.

Le dernier cas de figure que l'on peut envisager, est le cas où la taille du faisceau au plan du waist est différente de la taille du waist de la cavité. Notons Δw, cette différence de taille. On suppose que le waist du faisceau est bien placé en z = 0. Dans ce cas, le champ dans le résonateur s'écrit :

$$E_2(x) = A \times \exp\left(-\frac{x^2}{(w_0 + \Delta w)^2}\right) \quad \text{(III.2.45)}$$

Dans la limite d'un écart faible, on peut développer l'expression précédente et l'on obtient :

$$E_2(x) = A \times \left(f_0(x) + \frac{\Delta w}{w_0} f_2(x) \right) \quad \text{(III.2.46)}$$

Un défaut d'adaptation de la taille du faisceau peut donc être décrit par le couplage dans un mode d'ordre 2 en phase avec le mode fondamental.

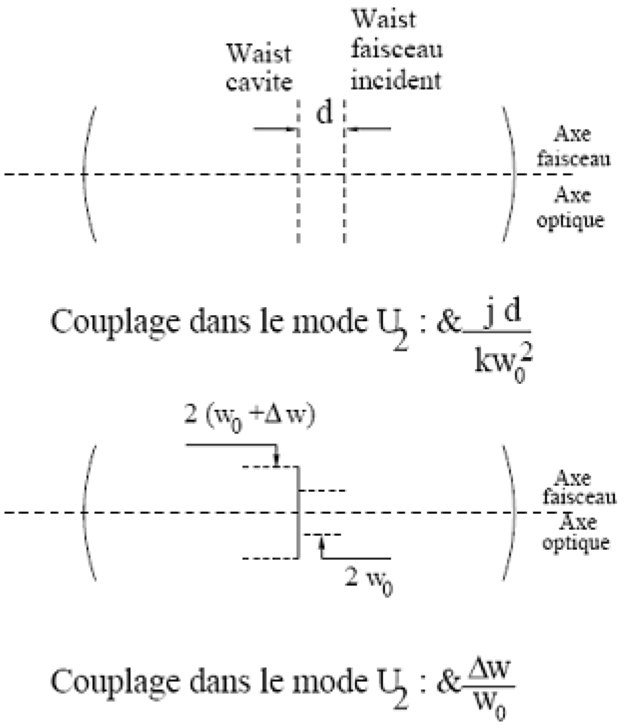


Figure C.3. Défauts d'adaptation du faisceau laser au waist de la cavité.

En résumé, les défauts d'alignement ou d'adaptation du faisceau peuvent donc être décrits par l'introduction de couplage dans des modes du premier ou second ordre en phase ou en quadrature de phase avec le mode fondamental.

Cet effet se caractérise par la perte de couplage dans le mode fondamental et donc de puissance dans la cavité lorsque la fréquence du laser est asservie à une fréquence de résonance de ce mode. On cherche donc à minimiser les couplages “parasites” en maîtrisant les deux aspects du couplage : la position et la taille du waist du faisceau incident d'une part, et la position et l'orientation du faisceau d'une autre part.

Bibliographie :

[1]. H. Kogelnick and T. Li, “Laser beams and resonators”, *Appl. Opt.*, vol. 5, pp. 1550-1567, 1966.

[2]. RJ. Jones, JC. Diels, J. Jasapara and W. Rudolph, “Stabilisation of the frequency, phase, repetition rate of an ultra-short pulse train to a Fabry-Perot cavity”, *Opt. Comm.*, vol. 175, pp. 409-418, 2000.

[3]. P. Sprangle, A. Ting, E. Esarey, and A. Fisher, “Tunable, short pulse hard X-raus from compact laser synchrotron source”, J. Appl., Phys., vol. 72, pp. 5032-5034, 1992.

[4]. J. Chen, K. Iinasaki, M. Fujita, C. Yamanaka, M. Asakawa, S. Nakai and T. Asakuma, “Development of a compact high brightness X-ray source”, Nucl. Instr. Meth. A, vol. 341, pp. 346-350, 1994.

[5]. Z. Huang and R.D. Ruth, “Laser-electron storage ring” Phys., Rev. Lett., vol. 80, pp. 976-979, 1998.

[6]. F.E. Carroll, “Tunable Monochromatic X Rays: A New Paradigm in Medicine”, American Journal of Roentgenology, vol. 179, pp. 583-590, 2002.

[7]. M.-C. Biston, A. Joubert, J.-F. Adam, H. Elleaume, S. Bohic, A.-M. Charvet, F. Estève, N. Foray and J. Balosso, “Cure of Fisher Rats Bearing Radioresistant F98 Glioma Treated with cis-Platinum and Irradiated with Monochromatic Synchrotron X-Rays”, Cancer Research, vol. 64, pp. 2317-2323, 2004.

[8]. P. Suorti and W. Thomlinson, “Medical applications of synchrotron radiation”, Phys. Med. Biol., vol. 48, R1-R35, 2003.

[9]. M. Cotte, E. Welcomme, V.A. Solé , M. Salomé , M. Menu, Ph. Walter and J. Susini, “Synchrotron-Based X-ray Spectromicroscopy Used for the Study of an Atypical Micrometric Pigment in 16th Century Paintings”, Anal. Chem., vol. 79, pp. 6988-6994, 2007.

[10]. R. Hajima, T. Hayakawa, N. Kikuzawa and E. Minehara, “Proposal of Nondestructive Radionuclide Assay Using a High-Flux Gamma-Ray Source and Nuclear Resonance Fluorescence”, J. Nucl. Sci. Tech., vol. 45, pp. 441-451, 2008.

[11]. G. Moortgat-Pick et al., “The Role of polarized positrons and electrons in revealing fundamental interactions at the linear collider”, Physics Reports, vol. 460, pp. 131–243, 2008.

[12]. R.J. Loewen, “A compact light source: design and technical feasibility study of a laser-electron storage ring X-ray source” Ph. D. dissertation, Dept. Phys., Stanford Univ., Stanford, CA, 2003.

[13]. C. Prescott, SLAC internal report, SLAC TN 73 1.

[14]. A. Denner & S. Dittmaier, Nucl. Phys. B407 (1993) 43.

[15]. Richard C. Fernow, “Introduction to experimental physics”, Cambridge University Press, 1986.

[16]. A.H. Compton, “A quantum theory of the scattering of x-rays by light elements”, Phys. Rev., Vol. 21, No. 5, May 1923.

[17]. V.B. Berestetskii, E.M. Lifshitz and L.P. Pitaevskii, *Quantum Electrodynamics*, volume 4 of *Course of theoretical Physics*, second edition translated. Pergamon Press. 82, 100, 100, 100, 101, 105.

[18]. K. Yokoya, P. Chen, “User’s Manual of CAIN”, http://lcdev.kek.jp/~yokoya/CAIN/cain235/CainMan235.pdf

[19]. G. Bardin et al., Conceptual Design Report of a Compton Polarimeter for Cebaf Hall A, DAPNIA/SPhN-96-14 (1996).
[20]. J.C. Aubert, C. Lejeune, Emittance and Brightness : “Definition and Measurements”, Advances in Electronics, Academic Press. Inc. (1984).
[21]. L.D. Landau, E.M. Liftsits, L.P. Pitaevskij : “Fisica Statistica” Ed. Riuniti, Ed. Mir (1978).
[22]. J. Buon, “Beam Phase Space and Emittance”, CERN Accelerator School Proceedings, CERN-94-01, 1994.
[23]. K.L. Brown, D.C. Carey, Ch. Iselin and F. Rothacker, CERN Report 80-04 (1980).
[24]. P.M. Lapostolle, IEEE Trans. Nucl. sci., NS 18-No 3,pag 1101 (1971).
[25]. E.D. Courant and H.S. Snyder *Ann. Phys.* (*N.Y.*) 3 (1958) 1–48.
[26]. K.R. Crandall, TRACE3d documentation, Los Alamos Accelerator Code Group,LA-UR-90-4146.
[27]. J. Rossbach, P. Schmüser, “Basic course on accelerator optics”, Proceedings of the fifth general Accelerator Physics course, CERN (1992). http://adweb.desy.de/~rossbach/uni/Cern.pdf
[28]. J. Le Duff. “Dynamique des particules chargées en présence de rayonnement synchrotron” cours de DEA physique et technologie des grands instruments.
[29]. H. Bruck, “Accélérateur circulaires de particules.” PUF, 1966.
[30]. M. Sands, “The physics of electron storage rings: an introduction”, SLAC-121 UC-28.
[31]. R.H. Helm, M.J. Lee, P.L. Morton, “Evaluation of synchrotron radiation integrals”, SLAC-PUB-1193 (1973).
[32]. A. Wolski “Damping Ring Basics”. Second ILC school (2007).
[33]. E. Bulyak, “Proceedings of the European particle Accélérator Conference”, Lucerne, 2004 (EPS-AG, Lucerne, 2004)
[34]. Z. Huang and R.D. Ruth, “Laser-electron storage ring”. Phys. Rev. Lett., 80:976-979, (1998).
[35]. G. Moortgat-Pick et al., Arxiv preprint hep-ph/0507011, (2005) - arxiv. org.
[36]. SLAC-Proposal-E166, October 2002.
[37]. M. Nomura et al., “Proceeding of EPAC 2004”, Lucerne, Lausane, 2004.
[38]. Posipol 2006 workshop, http://www.cern.ch/posipol2006.
[39]. ICFA, “Parameters For The Linear Collider”, see web page : www.interactions.org/linearcollider/documents/index.html.
[40]. A.A. Mikhailichenko and V.E. Balakin, “Conversion system for obtaining polarized electrons and positrons at high energy”, CBN 02/13 (1979).
[41]. K. Dobashi, et al., “Generation of Positrons Via Pair Creation From Compton Scattered Gamma Rays”, Nucl. Instrum. Meth. A437, 169 (1999).
[42]. J. Sheppard, “Conventional Positron Target For Tesla Formatted Beam”, LCC-133, SLAC-TN-03-072, Nov. 03.
[43]. H. Olsen et L.C. Maximon, “Photon and Electron Polarization in High-Energy Bremsstrahlung and Pair Production with Screening”, Phys. Rev. 114, 887 (1959).
[44]. R. Alley et al., “The Standford Linear Accelerator Polarized Electron Source”, Nucl. Inst. and Meth. A365, (1995).
[45]. A.A. Mikhailichenko and V.E. Balakin, “Conversion sistem for obtaining polarized electrons and positrons at high energy”, CBN 02/13 (1979).
[46]. G. Alexander *et al.*, “E-166 collaboration”, SLAC-TN-04-018, LC-DET-2003-044.
[47]. T. Omori, “Contribution to the 1st ILC Workshop”, Nov.13-15, 2004, KEK, Tsukuba : http://lcdev.kek.jp/ILCWS/Talks/13wg3-6-WG3-06 Positron Discussion Omori.pdf.
[48]. S.A. Collins, *Analysis of optical resonators involving focusing elements,* Appl. Opt. 3 (1964) 1263.

[49]. S. Araki et al., “Conceptual design of a polarized positron source based on laser Compton scattering” : http://arxiv.org/PS_cache/physics/pdf/0509/0509016v2.pdf.
[50]. T. Omori, “Contribution à Posipol 2008” : http://home.hiroshima-u.ac.jp/posipol/presentations/June16/Posipol2008_Omori_ver0.31.pdf
[51]. Will, T. Quast, H. Redlin and W. Sandner, “Nucl. Instrum. Meth.” A 472 (2001) 79.
[52]. F. Zomer, “Habilitation”, Université Paris 11-Orsay (2003) LAL/0312.
[53]. R.J. Loewen, “A compact light source : design and technical feasability study of a laser-electron storage ring X-ray source” , SLAC-Report-632 (2003).
[54]. R. Fitgerald, “Physics today 53”, 23 (2000) ; A. Momose, opt express 11, 2303 (2003).
[55]. P. Gladkikh et al., “Lattice design for the compact xray source based on Compton scattering”, Proceedings of EPAC-2000, p. 696-698 ;
H. Schwoerer et al., “Thomson-Backscattered X Rays From Laser-Accelerated Electrons” Phys. Rev. Lett. 96, 014802(2006) ;
F.E. Caroll et al., “Pulsed Tunable Monochromatic X-Ray Beams from a Compact Source: New Opportunities”, AJR 181, 1197 (2003) ;
A. Tsunemi et al., “Ultra-bright x-ray generation using inverse Compton scattering of picosecond CO-2 laser pulses”, proceedings of PAC, 2552 (1999) ;
S. Kashiwagi et al., “proceedings of PAC”, 694 (2002) ;
J. Lim et al., “proceedings of PAC”, 1673 (2005) ;
[56]. H. Blattmann et al., Nucl. Instr. Meth. in Phys. Res. A 548’, 17 (2005) ; J.F. Adam, Physica Medica 28, 92 (2008).
[57]. F. Zimmermann et al., proceedings of EPAC, 2520 (2006) : http://accelconf.web.cern.ch.
[58]. A. Gatto et al., Nucl. Instr. Meth. A 483, 172 (2002).
[59]. E. Bulyak et al., Phys. Rev. ST Accel. Beams 9, 094001 (2006).
[60]. C. Travier et al., Nucl. Instr. Meth in Phys. Res. A 304, 285 (1991).
[61]. R. Belbeoch et al., Rapport d’études sur le projet des linacs injecteurs de LEP (LIL), LAL/RT – 82-01 (1982).
[62]. M.A. Bowler et al., AIP Conf. Proc. 879, 627 (2007).
[63]. C. Limborg, P. Bolton, Nucl. Instr. Meth. A 557, 106 (2006); A. Loulergue, C. Bruni, M.E. Couprie, these proceedings, http://accelconf.web.cern.ch.
[64]. B.C. Yunn, proceedings of PAC, 2453 (1999) http://accelconf.web.cern.ch.
[65]. A. Buchner et al., EPAC, 732 (2000), http://accelconf.web.cern.ch.
[66]. C. Bruni, A. Loulergue, M.E. Couprie, proceedings of FEL, 118 (2007) http://accelconf.web.cern.ch.
[67]. M.A. Bowler et al., AIP Conf. Proc. 879, 627 (2007).
[68]. A. Todd, Nucl. Instrum. Methods, A 557, 36 (2006) ; F.E. Hannon, C. Hernandez-Garcia, proceedings of EPAC, 3550 (2006).
[69]. X-ray Data Booklet, Center for X-ray Optics and Advanced Light Source, LBNL, (2001).
[70]. R.J. Loewen, SLAC-Report-632 (2003).
[71]. Eric Black, LIGO Technical Note LIGO-T980045- 00- D. (1998)
[72]. R. Chiche, Eléments de réflexion pour la réalisation du contrôle d'un LASER pulsé, Note technique du PLP, (2005).
[73]. T. Brabec and F. Krausz, Rev. Mod. Phys. 72 (2000) 545.
[74]. S.T. Cundiff and J. Ye, Rev. Mod. Phys. 75 (2003) 325.
[75]. S.T. Cundiff , “phase stabilization of ultrashort optical pulses”, J. Phys. D: Appl. Phys. 35 (2002) R43.
[76]. S. Guiducci and E. Bressi, in Abstracts of POSIPOL 2006, CERN, Switzerland (2006), http://indico.cern.ch/contributionDisplay.py?contribId=31&sessionId=64&confI=845.

[77]. S. Guiducci and E. Bressi, “Lattice design for compton ring”, contribution POSIPOL 2006,CERN, Switzerland (2006) : http://indico.cern.ch/getFile.py/access?contribId=31&sessionId=64&resId=0&materialId=slides&confId=845.
[78]. E. Bressi, “Lattice design for compton ring”, Tesi di Laurea Specialistica, Università di Pisa (2006) : http://etd.adm.unipi.it/theses/available/etd-09292006-114554/unrestricted/tesifinale4.pdf.
[79]. C. Bruni et al. “The Radiothomx Project”, contribution to EPAC (2008). Available at http://accelconf.web.cern.ch.
[80]. P. Elleaume, M. Velghe, M. Billardon, and J. M. Ortega, "Diagnostic techniques and UV-induced degradation of the mirrors used in the Orsay storage ring free-electron laser," Appl. Opt. 24, 2762-2770 (1985)
[81]. R. Roux, “Etude des résultats des simulations PARMELA en fonction du nombre de particules”, Note interne, (2008).

[82]. A.E. Siegman, Lasers (University Science Books, Mill Valley, CA, 1986).
[83]. J. Stenger and H.R. Telle, Intensity-induced mode shift in a femtosecond laser by change in nonlineaire index of refraction, Opt. Lett. 25 (2000)1553.
[84]. F.W. Helbing et al., Carrier envelope-offset dynamics and stabilisation of femtosecond pulses, App. Phys. B74[Suppl.] (2002) S35-S42. Opt. Lett. 27(2002) 194.
[85]. N. Falletto, Etude, conception et réalisation d'une cavité Fabry Pérot pour le polarimètre Compton de TJNAF, université Joseph Fourier-Grenoble 1, 1999. DAPNIA/SPhN-99-03T.
[86]. J.P. Jorda, Mise au point d'une cavité Fabry Pérot pour la polarimétrie Compton, PhD. Thesis, Université Paris Pierre et Marie Curie.
[87]. P. Rebougeard, Note de synthèse sur l'optique de la cavité Fabry Pérot du polarimètre Compton, Internal note 6112N2000002.
P. Rebougeard, Tolérance mécanique pour la cavité Fabry Pérot du polarimètre Compton, internal note 6112N2000003.
[88]. G. Bardin et al., Conception design.
[89]. G.D. Boyd & J.P. Gordon, “Confocal multimode resonator for millimeter through optical wavelength masers”, Bell Syst. Tech. J. 40,489-508 (1961).
[90]. E. Morrison & al., “Automatic alignment of optical interferometers”, Appl. Optics, Vol 33, No 22, 1 August 1994.
[91]. Yaron Hefetz & al., “Principles of calculating alignment signals in complex resonant optical Interforemeters”, JOSA B 14 (1997)

[92]. J.A. Arnaud, “Nonorthogonal optical waveguides and resonators”, Bell Syst. Tech. J.49 (1970)2311
[93]. R.K. Luneburg, “Mathematical theory of optics”, (University of California, Los Angeles, 1964). This book is available at the Orsay central University Library.
[94]. M. Siber, Nonlinearity 11 (1998)1607.
[95]. Sze S.M., Physics of Semiconductor Devices, 2nd Edition (John Wiley & Sons, 1981).
[96]. Mathieu H., Physique des semiconducteurs et des composants electroniques (Masson, 1987).
[97]. Casey H.C., jr. and Panish M.B., Heterostructure Lasers, Part A - Fundamental principles, Part B - Materials and operating characteristics (Academic Press, 1978).
[98]. Agrawall G.P. and Dutta N.K., Long-wavelength semiconductor Lasers (Van Nostrand, 1986).

[99]. R. Wyatt and W.I. Devlm, “10 kHz linewidth L .5 pm InGaAsP extemal cavity laser with 55 nm tuning range”, *Electron. Lea,* vol. 19. pp. 1 10- 1 12, 1983.

[100]. R. Wyatt, K.H. Cameron, et M.R. Matthews “Tunable narrow-line. external cavity semiconductor lasers for coherent optical”, Br. *Telecom Technology Journal,* vol. 3, no. 4, Octobre 1985.

[101]. M.R. Matthews, K.K Cameron, R. Wyatt, et W.J. Devlin, “Packaged fnquency-stable tunable 20 kHz linewidth 1.5 µm InGaAsP extemal cavity laser”, *Electron. Lett.,*vol 21, pp. 1 13-1 15, 1985.

[102]. S. Solimeno & al., “Fabry-Perot resonator with oscillating mirrors”, Phys. Rev. A 43, 6227-6240 (1991).

[103]. C.J. Hood, H.J. Kimble and J. Ye, “Characterization of high-finesse mirrors: loss, phase shifts, and mode structure in optical cavity”, Phys. Rev. A, vol. 64, pp. 033804-033811, 2001.

[104]. N.I. Zheludev, “Polarization instability and multistability in nonlinear optics”, Sov. Phys. Usp., vol. 32, pp. 357-375, 1989.

[105]. S. Balestri, P. Burlamacchi, V. Greco and G. Molesini, “Folded CO_2 laser resonators with controlled beam quality”, Opt. Comm., vol. 104, pp. 91-06, 1993.

[106]. A.E. Siegman, *Lasers*, CA: University Science Books, Sausalito 1986, p. 607.

[107]. J. Yuan and X. Long, “Optical-axis perturbation in nonplanar ring resonators”, Opt. Comm., vol. 281, pp. 1204-1210, 2008.

[108]. S.A. Collins, Jr., “Analysis of optical resonators involving focusing elements”, Appl. Opt., vol. 64, pp. 1263-1275, 1964.

[109]. Matlab 6.5 software, The MathWorks Inc., 3 Apple Hill Drive, Natick, United States of America.

[110]. J.A. Arnaud, “Degenerate optical cavity”, Appl. Opt., vol. 8, pp. 189-195, 1969.

[111]. A.C. Nilsson, E.K. Gustafson and R.L. Byer, “Eigenpolarization theory of monolithic nonplanar ring oscillators”, IEEE J. Quant. El., Vol. 25, pp. 767- 790, 1989.

[112]. E. Hecht, *Optics*, Addison Wesley, San-Francisco 2002, p 426.

[113]. S. Saraf, R.L. Byer and P.J. King, “High-extinction-ratio resonant cavity polarizer for quantum-optics measurements”, Appl. Opt., vol. 46, pp. 3850-3855, 2007.

[114]. W.W. Chow, J. Gea-Banacloche, L.M. Pedrotti, V.E. Sanders, W. Schleich and M.O. Scully, “The ring laser gyro”, Rev. Mod. Phys., vol. 57, pp. 61-104, 1985.

[115]. H. Jiao, S.R. Wilkinson, R.Y. Chiao and H. Nathel, “Topological phases in optics by means of nonplanar Mach-Zehnder interferometer”, Phys. Rev. A, Vol. 39, pp. 3475-3486, 1989.

[116]. H.W Kogelnik, E.P. Ippen, A. Dienes and C.V. Shank, “Astigmatically compensated cavities for cw dye lasers”, IEEE J. Quant. El., vol. QE-8, pp. 373-379, 1972.

[117]. V. Magni, S. De Silvestri and A. Cybo-Ottone, “On the stability, mode properties, and misalignment sensitivity of femtosecond dye laser resonators”, Opt. Comm., vol. 82, pp. 137-144, 1991.

[118]. P. Hello, Rapport d'habilitation, LAL (1996).

[119]. M. Born and E. Wolf, *Principle of Optics*, Pergamon Press, Oxford 1965, p 30.

[120]. D. Jacob, M. Vallet, F. Bretenaker, A. Le Floc and M. Oger, “Supermirror phase anisotropy measurement”, Opt. Lett., vol. 20, pp. 671-673, 1995.

[121]. J.A. Arnaud, “Nonorthogonal waveguides and resonators”, *Bell Syst. Tech. J.*, pp. 2311-2348, 1970.

[122]. J.A. Arnaud and H. Kogelnik, “Gaussian light beam with general astigmatism”, Appl. Opt., vol. 8, pp. 1687-1693, 1969.

Table des figures

Liste des tableaux

Étude d'une cavité Fabry Pérot haute finesse à quatre miroirs pour des applications de production de rayons X et gamma par interaction Compton laser-électrons

Résumé

L'objectif principal de cette thèse porte sur l'étude et la conception d'une cavité Fabry Pérot de haute finesse pour amplifier un faisceau laser dans le but d'atteindre des gains de puissance allant de 10^4 à 10^5. Cette cavité est destinée à la production de rayons-X intenses et monochromatiques pour des applications médicales (anneau médical RADIOTHOMX) et de rayons gamma, pour la source de positrons polarisés pour les collisionneurs linéaires CLIC "*Collisionneur Linéaire Compact"* et ILC *"International Linear Collider"*, par interaction Compton entre un faisceau laser de grande puissance et un faisceau d'électrons.

Pour augmenter la luminosité de l'interaction Compton aux points de collisions, il est essentiel d'avoir non seulement un faisceau laser de très grande puissance mais il faut aussi que le faisceau soit très focalisé au point d'interaction. Pour atteindre de telles performances, deux cas de figures se présentent : une cavité concentrique mécaniquement instable ou une cavité à quatre miroirs plus complexe mais plus stable. Nous avons testé numériquement la stabilité mécanique et la stabilité de polarisation des modes propres de la configuration non planaire de différentes géométries de cavités à quatre miroirs. Expérimentalement, nous avons développé une cavité à quatre miroirs tétraédrique, des rayons de l'ordre de 20 micromètres ont été obtenus. Les modes propres de cette cavité, dans ses deux géométries planaire et non planaire, ont été mesurés et comparés aux résultats calculés numériquement. Un bon accord a été observé.

Dans un deuxième temps, l'impact de l'interaction Compton sur la dynamique transverse, dans le cas de la source de positrons polarisés, et sur la dynamique longitudinale, dans le cas de l'anneau médical, du faisceau d'électron a été étudié. La diffusion Compton provoque une perte d'énergie et induit une dispersion d'énergie additionnelle du faisceau d'électrons. Dans le cas de la source de positrons polarisés, dix points de collisions sont prévus. La ligne de focalisation a été déterminée et une modélisation de l'effet de l'interaction Compton sur le transport du faisceau, avec un calcul matriciel simple, a été faite. Dans le cas de l'anneau médical, l'interaction Compton provoque l'allongement du paquet d'électrons, qui à son tour influence le flux de rayons-X produit. Une étude de la dynamique longitudinale du faisceau d'électrons dans l'anneau a été présentée. Les paramètres de l'anneau qui permettent d'optimiser la luminosité de l'interaction Compton ont été discutés. Le flux de rayons-X qui peut être atteint avec ces paramètres est de l'ordre de 10^{13} *photons/s*.

Study of a high finesse four mirrors Fabry Perot cavity for X-rays and Gamme rays production by laser-electron Compton scattering

Abstract

The main goal of this thesis focuses on the study and design of a high finesse Fabry Perot cavity to amplify a laser beam in order to achieve power gains ranging from 10^4 to 10^5. This cavity is dedicated to the production of intense and monochromatic X-ray for medical applications (medical RADIOTHOMX ring) and gamma rays, for Compton based polarized positron source of the "*Compact Linear Collider"* CLIC, and the "*International Linear Collider* " ILC, by Compton scattering of a high power laser beam and electron beam.

To increase the brightness of the Compton interaction at the collision points, it is essential to have not only a high power laser beam but also very small laser beam radii at the interaction points. To achieve such performances, two scenarii are possible: a concentric two mirrors cavity witch is mechanically unstable or a four mirrors cavity more complex but more stable. We tested numerically mechanical stability and stability of eigen modes polarization of various planar and non-planar geometries of four mirrors cavities. Experimentally, we have developed a four mirrors tetrahedral "bow-tie" cavity; radii of the order of 20 microns were made. The eigen modes of such a cavity, in both planar and non planar geometries, were measured and compared with the numerical results. A good agreement was observed.

In a second time, the impact of Compton interaction on the transverse dynamics, in the case of the source of polarized positrons source, and the longitudinal dynamic, in the case of the medical ring of the electron beam was studied. Compton scattering causes energy loss and induces an additional dispersion of energy in electron beam. For the polarized positrons source, ten collision points are planned. The transport line has been determined and modelling of the Compton interaction effect with a simple matrix calculation was made. For the medical ring, Compton scattering causes bunch lengthening and energy dispersion increase which are to influence the produced X-ray flux. A study of the longitudinal dynamics of the electron beam in the ring was presented. The parameters of the ring that optimize the brightness of the Compton interaction were discussed. The X-ray flux that can be achieved with these parameters is about 10^{13} *photons/s*.